

# 土石流の粒子法モデルの改良による高速化と 侵食過程への適用

## ACCELERATING METHODS FOR PARTICLE MODEL OF DEBRIS FLOWS AND ITS APPLICATION TO ENTRAINMENT PROCESS

鈴木 拓郎<sup>1</sup>・堀田 紀文<sup>2</sup>・岩田 知之<sup>3</sup>

Takuro SUZUKI, Norifumi HOTTA, Tomoyuki IWATA

<sup>1</sup>国立研究開発法人森林総合研究所 (〒305-8687 茨城県つくば市松の里1番地)

E-mail: takurosuzuki@ffpri.affrc.go.jp

<sup>2</sup>筑波大学生命環境科学研究科 (〒305-8572 茨城県つくば市天王台1-1-1)

E-mail: hotta.norifumi.ge@u.tsukuba.ac.jp

<sup>3</sup>千葉県企業土地管理局 (〒261-0011 千葉県千葉市美浜区真砂5丁目2-1)

**Key Words:** debris flow, moving particles simulation, entrainment, deposition

### 1. はじめに

土石流の数値シミュレーションは一般的に浅水流方程式に基づいた手法<sup>例1)</sup>が用いられており、氾濫範囲の想定などに活用されてきた。この方法では、構成則<sup>例2)</sup>に基づいて垂直方向の流速・濃度分布を積分して平均化し、流下方向の1次元、または平面2次元のシミュレーションが幅広く実施されている。

一方、人工構造物周りのように地形条件が急激に変化し、流速や濃度が複雑な分布を呈するような条件においては、前述の手法では解析が困難であり、流体を粒子の集合体として扱う粒子法による解析が有効であると考えられる。近年、土石流現象に対する粒子法の研究も進んでおり、例えば、堰堤における衝撃荷重の解析を対象とした別府らの研究<sup>3)</sup>や、椿ら<sup>4)</sup>の構成則をMPS法<sup>5)</sup>に導入して流速分布の再現を試みた阿部ら<sup>6)</sup>の研究が挙げられる。

鈴木・堀田<sup>7)</sup>は、阿部ら<sup>6)</sup>と同様の立場に立ち、江頭らの構成則<sup>2)</sup>をMPS法<sup>5)</sup>に導入したモデル(以下、MPS-DF法とする)を開発し、構成則に基づいた流速分布・濃度分布を再現可能とした。さらに、濃度分布の変化によるせん断応力の変化に基づいて、土石流の堆積過程を粒子の停止という形で再現可能で

あり、高濱ら<sup>8)</sup>の勾配急減点における堆積過程の実験結果を、土砂濃度の局所平衡が成立する条件の下で再現可能であることを示している。

このように粒子法は、従来の手法よりも高精度の解析結果が得られることが期待されるが、計算要素数の多さから、膨大な計算時間を要する。そのため、実用面からあまり研究が進んでいなかったとも考えられ、現在もそのような認識が一般的ではないかと想像される。しかし、計算工学分野も日々発展しており、様々な高速化技術が提案されている。そこで、本研究では、MPS-DF法<sup>7)</sup>をベースとして、計算精度を保ちつつ、計算速度の向上が図れるよう、計算モデルやプログラムのアルゴリズムを改良することを目的とした。さらに、高濱ら<sup>8)</sup>による勾配急減点の堆積過程の実験および岩田ら<sup>9)</sup>による河床土砂の侵食過程に関する実験を検証材料として、本手法の適用性を検証した。なお、本研究の対象は、江頭らの構成則<sup>2)</sup>の適用領域となる層流型土石流である。

### 2. MPS-DF法の概要とその改良

#### (1) MPS-DF法の概要

MPS-DF法は江頭らの構成則<sup>2,10)</sup>に基づいた流れ

を浅水流方程式を用いずに、全てを粒子法 (MPS 法<sup>5)</sup>) の枠組みのみで解析するために、抵抗則や濃度則をモデル化したものである。以下に概要を示すが、基本部分の詳細は鈴木・堀田<sup>7)</sup>を参照されたい。

MPS-DF 法では、江頭らの構成則に基づいて土石流を 1 流体として扱うため、土石流自体を土砂濃度の情報を持った粒子の集合体に分割する。まず、抵抗則は MPS 法の枠組みに導入できるように展開して導入した。せん断応力は周辺粒子との速度勾配や、粒子毎に持つ土砂濃度の関数として算出される。土砂濃度については、図-1 のように周辺粒子間で値が移動するモデルを構築した。まず、着目粒子の現在の物理量を従来の江頭らの濃度分布式<sup>10)</sup>に適用して、平衡濃度勾配  $gc_e$  を算出する。そして、周辺粒子との現在の濃度勾配  $gc$  を算出し、 $gc_e$  と  $gc$  の大小関係に基づいて粒子間で濃度を移動させる。この処理を粒子間距離による重みづけを考慮して周辺粒子と実施する。このモデルでは、濃度勾配が平衡濃度勾配に遷移するために要する時間として緩和時間  $T$  をパラメータとして導入した。高濱ら<sup>8)</sup>の実験結果を対象とした検証<sup>7)</sup>では、 $T$  が基本となる粒子間距離を最大流速の粒子が移動する時間の半分よりも小さい値、つまり土砂濃度の局所平衡条件を成立させる条件において実験結果を再現可能であった。

なお、本モデルでは濃度変化が発生する際の力の受け渡しは考慮していない。 $T$  が非常に小さいということは、流れの時間スケールに対して濃度変化の時間スケールが非常に小さいということであり、粒子の移動に対する影響は小さいと考えられる。あるいは、濃度の移動は主に垂直方向であるため、濃度の変化に伴う力が圧力の中に含まれてしまっている可能性がある。今後、粒子法における圧力解と圧力の厳密解を比較するなど詳細な検討が必要である。

### (2) 圧力勾配項を改良した CMPS 法の導入

標準 MPS 法<sup>5)</sup>には、粒子に作用する圧力勾配力を算出する際に、運動量が完全に保存されないという問題点があった。Khayyer・Gotoh<sup>11)</sup>は、粒子間の midpoint に仮想的圧力定義点を設けて圧力勾配評価を行うことにより、この問題を解消した CMPS 法を提案した。したがって、MPS-DF 法にも CMPS 法を導入した。

### (3) 陽解型 MPS 法の導入

標準 MPS 法<sup>5)</sup>は、圧力を陰的に、その他は陽的に計算する手法である。後述するが、本研究で構築するプログラムでは解析の高速化のために OpenMP による並列化を実施する。しかし、反復計算を伴う陰

解法では、有効な並列化が難しくなる。そのため、圧力を陽的に解析可能な陽解型 MPS 法<sup>12)</sup>を導入する。陽解法による圧力は次式で算出される。

$$P_i^{k+1} = c^2 \frac{\rho_0}{n^0} (n_i^* - n^0) \quad (1)$$

ここに、 $P$  は圧力であり、下添字  $i$  は任意の粒子番号、上添字  $k+1$  は任意の計算ステップ  $k$  の次ステップを意味している。また、 $\rho_0, n^0$  は圧力の標準値に対する密度と粒子数密度である。 $n_i$  は任意の粒子番号  $i$  の粒子数密度であり、上添字\*は応力計算の算出後の中間段階を示している。そして、 $c$  は音速であるが、実際の物性値ではなく実際よりも小さな仮想値を与える。この点については、3. (2) で詳述する。

## 3. 計算の高速化と時間関連パラメータの設定

### (1) 領域分割法と OpenMP による並列化

粒子法では、任意の粒子に対して影響半径  $r_e$  の範囲内にある近傍粒子との相互作用を算出しながら計算を進める。粒子毎の影響範囲内の粒子数はほぼ一定のため、粒子の相互作用の計算量は粒子の総数  $N$  に比例する。しかし、粒子同士が影響範囲内に存在するかの判定、すなわち近傍粒子の探索の計算量は粒子の組み合わせの数、 $N \times N$  に比例することにな

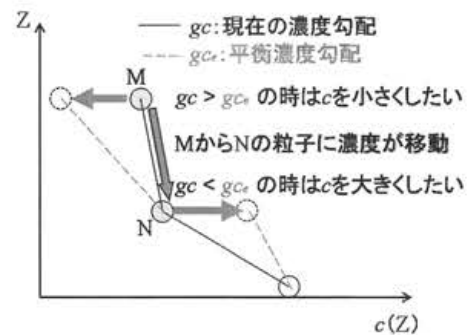


図-1 濃度移動モデルのイメージ

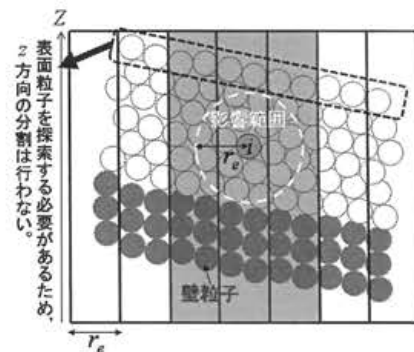


図-2 領域分割法のイメージ

り、計算負荷が最も大きい部分である。この近傍粒子探索部分の計算負荷の軽減のために、本研究モデルでは領域分割法<sup>13)</sup>を導入した(図-2)。これは、空間を影響半径 $r_e$ で等分割し、粒子毎に存在する空間番号を登録する方法である。着目粒子 $i$ が存在する空間に隣接した空間(図-2のグレーの領域)に存在する粒子のみを対象として近傍粒子の探索を行えば良いので、計算量が減少する。ただし、MPS-DFでは表面粒子を探索する計算があるため<sup>7)</sup>、重力方向( $z$ 方向)の空間分割は行っていない。

本研究では陽解法を導入するため、探索した近傍粒子の番号を配列として記憶しておけば、時間ステップ内の計算では基本的に粒子毎の計算に独立可能である。したがって、OpenMPによる並列化が容易である。この並列化は、マルチコアのCPUにおいて、各CPUに計算を担当する粒子を割り付けるものである。本計算モデルの場合は領域分割法を併用しているため、各CPUに担当領域を割り付けている。

## (2) 刻み時間と緩和時間の設定

浅水流方程式に基づいた手法でも同様であるが、刻み時間が大きいと計算ステップが少なくなるため、計算は早く終了する。しかし、刻み時間は数値的安定性を損なわない範囲で設定しなければ、計算は発散する。この数値的安定性とは、物理量の伝搬速度が計算点の間隔を越えてはならないということであり、CFL条件として示される。粒子法におけるCFL条件は、クーラン数 $C_u$ を用いて以下で示される。

$$C_u = \frac{u_{\max} \Delta t}{l_0} \quad (2)$$

ここに、 $u_{\max}$ は全粒子の最大流速、 $\Delta t$ は刻み時間、 $l_0$ は粒子間隔の標準値である。計算では、 $C_u$ を一定値として設定し、時間ステップ毎の $u_{\max}$ を用いて $\Delta t$ を与えれば良い。つまり、 $\Delta t$ は変動値となる。

CFL条件と関連したパラメータ設定として音速 $c$ の設定がある。式(1)の陽解型MPS法の圧力計算過程には音速 $c$ が必要であり、仮想値を与えると前述した。大地ら<sup>12)</sup>によれば、 $c$ は以下の式となる。

$$\frac{u_{\max}}{c} = 0.2 \quad (3)$$

さて、緩和時間 $T$ については、鈴木・堀田<sup>7)</sup>では、基本となる粒子間距離 $l_0$ を最大流速 $u_{\max}$ の粒子が移動する時間の半分よりも $T$ を小さい値に設定すれば、実験結果と一致していた。つまり、

$$T < \frac{1}{2} \frac{l_0}{u_{\max}} \quad (4)$$

が成立する。式(4)に、式(2)を変形して代入すると、

$$T < \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{C_u} \quad (5)$$

が成立する。つまり、土砂濃度の局所平衡を満たす条件で与えるのであれば、 $T$ は次式のように $\Delta t$ に対する変動値として設定できると考えられる。

$$T = K_{\infty} \Delta t, \quad K_{\infty} < \frac{1}{2C_u} \quad (6)$$

ここで $K_{\infty}$ は $\Delta t$ に対する緩和時間の係数である。

このように各パラメータを時間変動値として与えると、条件が厳しい時には小さい $\Delta t$ で、条件が緩やかな時は大きい $\Delta t$ で解析可能であり、計算速度の点でも、安定性でも有利である。ただし、 $T$ を変動値することの可否については、本研究で検証する。

## 4. 検討方法と条件

### (1) 検討目的

改良モデルや計算方法について、既往研究の実験結果を用いて、その有効性を検証した。以下に示す条件を対象に、領域分割法・並列化をともに導入しない場合、領域分割法を導入して並列数を変化させる場合で計算した。検討内容は、計算モデル部分の改良に伴う実験結果の再現性の変化、高速化手法の導入による計算速度の違いという両面で検討した。

なお、プログラムはフォートラン言語で記述し、Intel Compiler 16.0でコンパイルした。計算に用いたのは、Intel Xeon E5-2630v3 (8core, 2.40GHz)を2基搭載するワークステーションである。合計16コアであり、ハイパースレッディングテクノロジーにより、最大32スレッドの並列計算が可能である。

### (2) 勾配急減点における堆積過程

高濱ら<sup>8)</sup>による水路実験を検証対象として、同一の条件で計算を実施した。検証対象と計算条件は表-1に示す1ケースである。物性値は一般値<sup>2)</sup>と文献値<sup>7)</sup>から設定していて、感度分析的な調整は特にしていない。から18度から4度に勾配が急減する地形条件で、固定床条件で実験を行っている。上流側から水と土砂を供給して、土石流を発生させ、勾配変化点における堆積過程等を計測している。計算におけるクーラン数 $C_0$ は0.05であり、式(6)から $K_{\infty} < 10$ となるため、 $K_{\infty} = 5.0$ と設定した。

検討では、勾配変化点における堆積形状に着目し、計算モデルの再現性を検証する。計算速度は、計算開始から5.00~5.01秒の計算に要した時間を用いて

比較する。このように、解析対象時間を短く設定したのは、計算速度の変化と粒子数の関係进行分析するために、粒子数をできるだけ固定するためである。計算では上流から土石流が供給され続けるため、解析対象内に存在する粒子数が時間的に変化する。

### (3) 移動床における河床土砂の侵食過程

岩田ら<sup>9)</sup>の実験を対象として、同一の条件で計算を実施した。条件は表-1に示す1ケースである。物性値は一般値<sup>2)</sup>と文献値<sup>9)</sup>から設定している。感度分析的な調整は特に行っていない。実験では、勾配は15度で一定で、水路は全長10mで、水路の下流側5.0mの底面を10cm嵩上げし、水路の上流側には下流側と同じ高さになるよう、水でほぼ飽和した状態の砂礫を10cmの深さまで堆積させている(移動床区間)。水路上流端より一定流量の水を供給して上流区間で侵食・土石流化させ、流下した土石流を水路下流端に設置した箱で先端から約0.5秒間隔で5つのサンプルを採取している。また、先端が水路下流端に到達してから約8秒後に再度土石流の採取を1度のみ行っている。各サンプルの採取に要した時間から、土石流流量、流砂量を算出している。計算における $C_0$ 、 $K_{co}$ はそれぞれ0.01、5.0である。

検討では、下流端における流量と流砂量の時間変化に着目し、計算モデルの再現性を検証する。計算速度は堆積過程と同様の理由で、計算開始から10.00~10.01秒の計算に要した時間を用いて比較する。

## 5. 結果と考察

### (1) 勾配急減点における堆積過程の再現性

高濱ら<sup>8)</sup>と同じ経過時間(土石流の先端が勾配急減点に達してからの経過時間)の計算結果を抽出し、実験結果と比較した結果を図-3に示す。下流側勾配の方向をX軸、それと直交する軸をZ軸として座標変換している。なお、領域分割法のあり・なしや並列数の変化では計算結果は変化しない。

本研究モデルの結果は実験結果とよく一致している。鈴木・堀田<sup>7)</sup>の緩和時間 $T$ の小さい条件の計算結果と全般的には大きな変化はないことから、陽解法の導入、緩和時間 $T$ の時間変動設定は、計算精度に影響を与えないと言える。細かい部分では、2.18秒経過後において、鈴木・堀田<sup>7)</sup>では勾配変化点の上流側(X=-13~-12あたり)は実験結果よりも堆積粒子が多くなっていたが、本研究モデルではそれが解消され、再現精度は上昇した。本研究では結果は示していないが、陽解法のあり・なし、CMPS法のあ

り・なしを比較すると、この結果は主にCMPS法の導入によるものであった。CMPS法により、運動量が完全に保たれるようになったことで、河床付近の粒子の挙動が変化したためであると考えられる。

### (2) 移動床における河床土砂の侵食過程の再現性

図-4, 5, 6に下流端における土石流全体流量、流砂量、濃度(輸送濃度 $c_s$ 、体積濃度 $c_v$ )の時間変化を岩田ら<sup>9)</sup>と比較して示す。ただし、実験で測定可能なのは輸送濃度のみである。MPS-DFの結果は下流端から水平距離で2cmの範囲に存在する粒子の流速と濃度から換算した。岩田ら<sup>9)</sup>は一次元計算の結果も同時に示しているが、本研究においても宮本・伊藤<sup>14)</sup>の手法を用いて一次元計算(以下、1d-simとす

表-1 堆積過程および侵食過程の計算条件

	堆積過程	侵食過程
クーラン数 $C_0$	0.05	0.01
緩和時間の係数 $K_{co}$	5.0	5.0
高濱ら <sup>8)</sup> におけるRun No.	1-2-2	
上流側河床条件	固定床	侵食部移動床
下流側河床条件	固定床	固定床
流入土石流流量( $\text{cm}^2/\text{s}$ )	127.3	200.0
流入土石流の濃度 $c$	0.349	0.01(水)
上流側勾配( $^\circ$ )	18.0	15.0
下流側勾配( $^\circ$ )	4.0	勾配一定
水の比重 $\rho_w$	1.00	1.00
砂礫の比重 $\sigma$	2.65	2.64
摩擦角 $\phi_s$ ( $^\circ$ )	38.5	38.5
堆積濃度 $c$	0.60	0.60
反発係数 $e$	0.78	0.78
粒径 $d$ (cm)	0.342	0.14
粒子間距離 $l_0$ (cm)	0.25	0.25

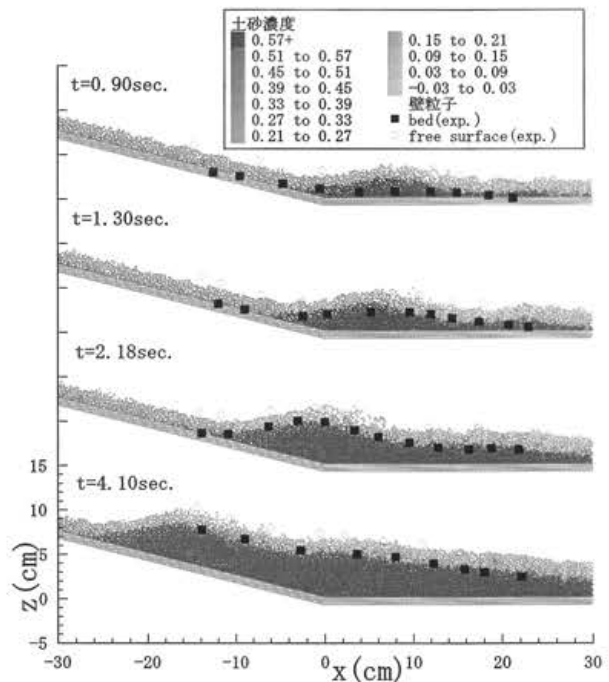


図-3 堆積過程の計算結果

る)を実施し直し、結果を図に示している。岩田ら<sup>9)</sup>と同様に、特に流砂量、輸送濃度  $c_t$  は、1d-sim は実験結果よりも過大評価となっているが、MPS-DF の結果は実験結果とよく一致している。1d-sim は、先頭部の輸送濃度は勾配 15 度の平衡濃度まで上昇していた。一方、実験結果や MPS-DF では先頭部は平衡濃度まで上昇していない。

このような差異が生じたのは、輸送濃度の取り扱いが原因であると考えられる。土石流の土砂濃度は一般的に河床から表面に向かって小さくなる分布を有するため、体積濃度と輸送濃度は本来異なる値をとる(図-6のMPS-DF)。宮本・伊藤<sup>14)</sup>の手法では、体積濃度が  $c_v/2$  以下は砂礫層濃度を  $c_v/2$  と設定して輸送濃度を評価しているため、体積濃度との差が生じるが、体積濃度が  $c_v/2$  以上は体積濃度=輸送濃度となる(図-6)。しかしながら、勾配 15 度のように体積濃度が  $c_v/2$  以上の領域でも濃度分布の厳密解は河床から表面に向かって小さくなる分布を有し<sup>2),4)</sup>、体積濃度と輸送濃度は異なる。このようなことが原因で 1d-sim の再現性が低下したと考えられる。

図-7に、本研究モデルによる先頭部付近の流況を示す。土砂濃度によって濃淡を変化させた図を見ると、先頭部付近に濃度の小さい領域が形成されていることがわかる。後続部の土砂濃度は河床から表面に向かって小さくなっており、上層の速い流速によって上層の濃度の小さい部分が先頭部に集中していた。このようなメカニズムで先頭部での土砂濃度が平衡濃度よりも小さくなっており、実験でも同様の現象が起きていたと考えられる。

### (3) 各手法による計算速度の変化

領域分割法あり・並列数 1 の計算時間を基準計算時間として、各手法の計算効率を基準計算時間÷計算時間として算出した。表-2には、領域分割法なしの計算効率、図-8には領域分割法ありの条件で、並列数と計算効率の関係を示す。なお、解析対象時間の粒子数は、勾配急減点における堆積過程、堆積土

砂の侵食過程でそれぞれ約 7500、約 75000 である。

表-2より、領域分割法により計算効率が数十から数百倍に上昇していることがわかる。粒子数が多いと計算効率の上昇は大きい。また、図-8より並列数に応じて計算効率が上昇していることがわかる。ただし、計算効率は並列数には比例せず頭打ちとなる。これは並列化できない部分やデータ通信などの影響である。粒子数が少ないほど頭打ちしやすく、大規模計算ほど並列化のメリットは大きいと言える。

なお、クーラン数と空間解像度が同一の条件で実施した 1d-sim の計算時間は、領域分割法あり・並列数 32 に対して約 1/88 であった。

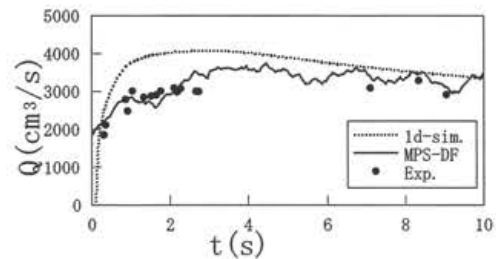


図-4 下流端における流量

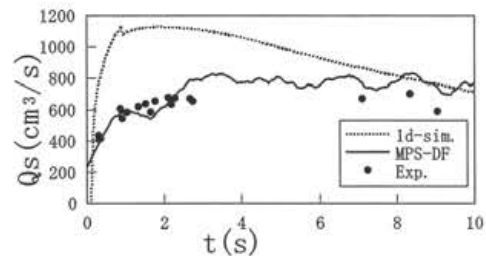


図-5 下流端における流砂量

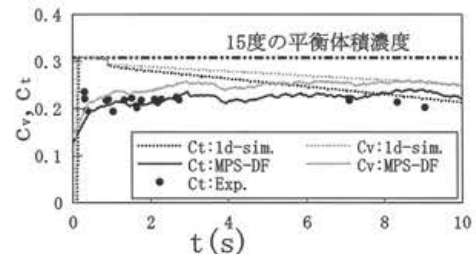


図-6 下流端における輸送濃度と体積濃度

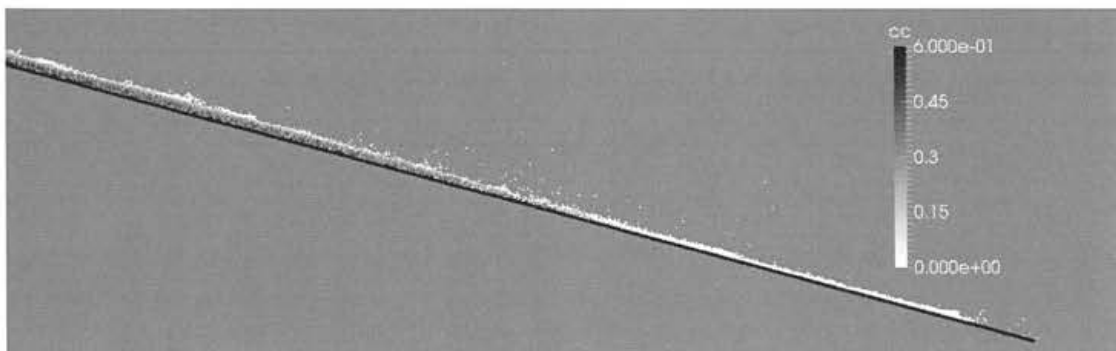


図-7 先頭部の流下状況(凡例の色は土砂濃度)

表-2 領域分割法なしの場合の計算効率

計算ケース	粒子数	領域分割法なしの計算効率
勾配急減点における堆積過程	約7500	1/51.9
堆積土砂の侵食過程	約75000	1/220.7

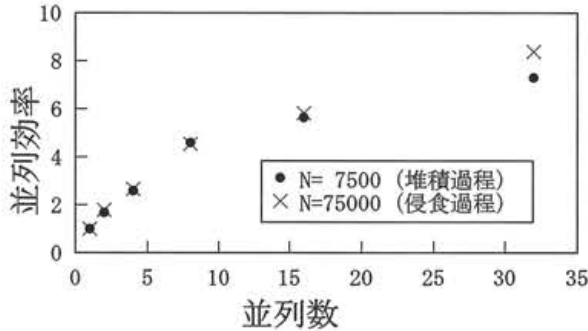


図-8 本研究モデルによる堆積過程の計算結果

## 6. おわりに

本研究では計算精度を保ちつつ計算速度を向上させるために、MPS-DFにいくつかの修正を加えた。

現象の再現性という点では、CMPS法の導入により勾配変化点上流部の堆積過程の再現性が少し上昇した。また、侵食過程においてもMPS-DFは1d-simよりも実験結果の再現性が高いことが示された。その理由として、体積濃度と輸送濃度の違いの評価方法があげられる。粒子法では垂直分布を解析しているため、体積濃度と輸送濃度の違いを直接評価可能だが、浅水流方程式による手法では土砂の連続式上で評価しなければならない。体積濃度と輸送濃度の区別自体がされていない場合りもあるが、体積濃度と輸送濃度の違いの厳密な評価は重要な課題である。

MPS-DFにおける緩和時間に関して、本研究では、土砂濃度の局所平衡を満たす条件下で、刻み時間に連動して緩和時間を時間変動的に設定する方法を提案した。この方法を用いて侵食過程、堆積過程ともに再現性が良好であったことから、再現性、計算の速さという点で有効な手法である。

計算速度という観点では、領域分割法のような計算アルゴリズムの改良による計算速度の向上効果は非常に大きい。また、計算機の性能に応じて並列化による計算効率の向上も期待できる。両者を合わせれば、数百～数千倍以上の計算効率の向上効果が得られる。従来、粒子法は計算負荷が大きく、実用面では非現実的と考えられる側面もあったが、計算手法の効率化や計算機性能の向上によって十分に実用に耐えうるものとなってきている。計算効率を最大

化しても、従来の手法に比べれば計算速度はまだまだ及ばないが、計算精度を考慮しながら、両者の手法を相補的に用いるべきと考えられる。

## 参考文献

- 1) 高橋保・井上素行・中川一・里深好文:山岳流域における土砂流出の予測, 水工学論文集, 第44巻, pp.717-722, 2000.
- 2) 江頭進治・芦田和男・矢島啓・高濱淳一郎:土石流の構成則に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第32号B-2, pp.487-501, 1989.
- 3) 別府万寿博・井上隆太・石川信隆・長谷川裕治・水山高久:修生MPS法による土石流段波モデルのシミュレーション解析, 砂防学会誌, Vol.63, No.6, pp.32-42, 2011.
- 4) 椿東一郎・橋本晴行・末次忠司:土石流における粒子間応力と流動特性, 土木学会論文報告集, 第317号, pp.79-91, 1982.
- 5) Koshizuka, S. and Oka, Y.: Moving Particle Semi-implicit Method for Fragmentation of Incompressible Fluid, Nuclear Science and Engineering, Vol.123, pp.421-434, 1996.
- 6) 阿部孝章・里深好文・水山高久:高濃度石礫流れの粒子間応力を考慮した粒子法の開発, 砂防学会誌, Vol.63, No.6, pp.23-31, 2011.
- 7) 鈴木拓郎・堀田紀文:土石流の構成則に基づいた粒子法モデルの構築と堆積過程への適用, 砂防学会誌, Vol.68, No.1, pp.13-23, 2015.
- 8) 高濱淳一郎・藤田裕一郎・近藤康弘・蜂谷圭:土石流の堆積侵食過程に関する実験と二層流モデルによる解析, 水工学論文集, 第46巻, pp.677-682, 2002.
- 9) 岩田知之・堀田紀文・鈴木拓郎:混合粒径土石流における分級現象が流動特性に及ぼす影響, 砂防学会誌, Vol.66, No.3, pp.13-23, 2013.
- 10) 江頭進治・宮本邦明・伊藤隆敦:掃流砂量に関する力学的解釈, 水工学論文集, 第41巻, pp.789-794, 1997.
- 11) Khayyer, A. and Gotoh H.: Development of CMPS method for accurate water-surface tracking in breaking waves, Coastal Engineering Journal, Vol. 50, No. 2, pp. 179-207, 2008.
- 12) 大地雅俊・越塚誠一・酒井幹夫:自由表面流れ解析のためのMPS陽的アルゴリズムの開発, 計算工学講演会論文集, 15(2), pp.589-590, 2010.
- 13) 後藤仁志・林稔・目見田哲・酒井哲郎:粒子法による直立護岸前面の砕波・越波の数値シミュレーション, 土木学会論文集, 726, pp.87-98, 2003.
- 14) 宮本邦明・伊藤隆敦:支配方程式に侵食速度式を導入した場合の土石流の数値シミュレーション手法, 砂防学会誌, Vol.55, No.2, pp.24-35, 2002.

(2016.5.31 受付)