データ構成に着目した特異値分解に基づく 3 次元斜面の崩壊モード分析

MODE ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL SLOPE FAILURE USING SINGULAR VALUE DECOMPOSITION BASED ON DATA STRUCTURE

落合 陶子[1]・笠間 清伸[2]・李 洋[3]
Toko OCHIAI, Kiyonobu KASAMA and Yang LI

[1]九州大学大学院（〒819-0395　福岡市西区元岡 744 番地ウエスト 2 号館 11 階 1110 号室）
E-mail: ochiai.toko.384@s.kyushu-u.ac.jp
[2]九州大学大学院工学研究院（〒819-0395　福岡市西区元岡 744 番地ウエスト 2 号館 11 階 1128 号室）
E-mail: kasama.kiyonobu.898@m.kyushu-u.ac.jp
[3]九州大学大学院工学研究院（〒819-0395　福岡市西区元岡 744 番地ウエスト 2 号館 11 階 1111 号室）
E-mail: li.yang.168@m.kyushu-u.ac.jp

***Key Words**: slope failure, mode analysis, MPM, singular value decomposition, data structure*

1. 序論

近年，巨大地震や豪雨などに伴う斜面崩壊リスクの高まりにより，斜面崩壊挙動を精度よく推定する手法が求められている．本研究では，そのような実地盤条件への適用を目指した基礎的検討として，自重を崩壊起因とする単層均一地盤を対象に解析を行った．一般に，斜面崩壊には「表層崩壊」,「斜面内破壊」,「斜面先破壊」および「底部破壊」の 4 つの基本モードが存在するといわれている．しかし，これらは斜面の崩壊形状のみに着目したものであり，斜面崩壊挙動の推定に重要な崩壊後の形状や崩壊土砂の到達範囲まで得ることはできない．そこで本研究では，斜面崩壊後の変位場に対して特異値分解を適用し，崩壊後の形状および土砂の到達範囲を含む変位場を低次元で表現可能な斜面崩壊モードを提案することを目的とした．本文では，まず，大変形問題にまで適用可能な粒子・格子併用型の連続体解析法（MPM: Material Point Method）を用いて，単層均一地盤に対し，粘着力や内部摩擦角を変化させた 3 次元斜面崩壊解析を行った．次に，MPM 解析により得た各粒子の移動変位データに特異値分解を適用し，斜面崩壊挙動を支配的な空間モードとそれに対応するモード係数に分解した．特異値分解によって得られる空間モードは，用いる粒子移動変位データの構成方法に依存すると考えられる．そこで，本文では，各粒子の移動変位データに対して 2 種類のデータ構成を作成した．これにより，複数の解析条件による斜面崩壊後の変位場を主要なモードの重ね合わせとして低次元で表現するとともに，2 種類のデータ構成によって抽出される空間モードおよびモード係数を比較することで，崩壊後の変位場を適切に表現するために有効なデータ構成について検討した．

2. 解析概要

本研究の解析フローを示す．本研究では，MPM の改良法の一つである GIMP（Generalized Interpolation Material Point method）[1)]を用いて 3 次元斜面を対象に解析を行った．MPM は Sulsky ら [2)]により提唱された，計算格子と，格子内に配置した材料点を用いた粒子・格子併用型の連続体解析法である．MPM における材料点は，連続体を離散的に表現するための計算点であり，質量，速度，応力，ひずみなどの物

理量を保持する．なお，これらの材料点は DEM における個々の土粒子とは異なり，実際の土粒子を直接表現するものではない．解析では，まず物質点に保持された物理量を背景格子へ投影し，格子点上で運動方程式を解く．その後，更新された物理量を材料点へ再投影し，材料点は物理量を持ちながら空間内を移動することで所属する格子へ物理量を輸送する．しかしながら，材料点が格子境界を通過する際，応力ひずみが不連続に変化する等の課題がある．GIMP はその数値誤差を低減するために Bardenhagen らによって提案された改良手法である．材料点が格子を超える際，応力，ひずみを線形変化させるために，物理量を計算する際に用いられる形状関数S_pの導関数G_pを一次線形で定義する．また，多次元解析を実施する場合，補間係数は直交方向に定義した形状関数の積の形式とする[3]．(式(1))

$$S_p = S_x \cdot S_y \cdot S_z \tag{1}$$

このような MPM 解析で得られた各材料点の移動後の座標から，3 次元斜面崩壊に伴う各材料点の移動変位$disp$を計算した．

次に，MPM 解析によって得られた各材料点の移動変位$disp$を行要素，解析ケースを列要素とするデータ行列Xを作成し，特異値分解[4]を行った．本研究では，特異値分解に用いたデータの前処理として平均除去や正規化などは行っていない．データ行列Xに対し，特異値分解を適用すれば，Xは式(2)のように変形できる．ここで，Uは左特異ベクトル，Vは右特異ベクトル，$\sum$は特異値行列である．

$$X = U\Sigma V^T \tag{2}$$

また，行列Xの列ベクトルx_jは，各モードu_kとその係数α_{jk}の総和として再構成できる(式(3))．

$$x_j = \sum_{k=1}^{r}(\sigma_k v_{jk})u_k = \sum_{k=1}^{r}(\alpha_{jk})\,u_k \tag{3}$$

本研究で特異値分解により抽出される空間モードは，複数の解析ケースに共通する変位場の特徴を表す数学的な基底である．各解析条件の斜面崩壊挙動は，これらの支配的な空間モードの重ね合わせとして近似的に表現できることから，本研究ではこれらを斜面崩壊挙動を特徴づけるモードとして解釈した．また，各特異値の二乗は各空間モードの分散に対応する量である．寄与率は，特異値の二乗を全特異値の二乗和で除した値であり，データを圧縮する次元数を決定するための指標として用いた．あるモードjの寄与率c_jは，特異値σ_jを用いて，式(4)で求めることができる．

$$c_j = \frac{\sigma_j^2}{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2} \tag{4}$$

3. 解析条件

(1) 斜面の地盤特性

MPM 解析で用いた解析条件および斜面モデルを**表-1, 図-1** に示す．本文で用いた 3 次元斜面は，斜面角度を 20°，斜面高さと基礎地盤深さをそれぞれ 20m，斜面幅を 50m とする単層均一地盤である．本解析では y=0m および 50m において y 方向変位を固定する境界条件を設定した．また，粘着力と内部摩擦角の値はテイラーの安定図表[5]を用いて，安全率を 1.0 として決定した．なお，本解析では，一辺 2m の立方体背景格子を用いており，GIMP における材料点領域長は 1m とした．また，本研究で用いた MPM 解析コードは，Yu ら[6]によって開発，検証されたものであり，既往の研究および実験結果との比較により解析精度および妥当性が確認されている．本解析では，材料点の移動状況を確認し，崩壊が概ね終了した時点を解析終了時刻とした．

(2) 特異値分解で用いたデータ行列の構成

本文では，2 種類のデータ行列構成を用いて特異値分解に基づくモード解析を行った．データ行列は，各材料点の移動変位を行要素，解析ケースを列要素として構成した．ここで，dx，dy，dzは各方向の材料点の変位量であり，各材料点の 3 次元移動変位$disp$は次式を用いて算出した．

$$disp = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \tag{5}$$

データ構成 1 では，各材料点の 3 次元移動変位$disp$を用いてデータ行列を構成し，解析を行った．データ構成 2 では，各方向の変位量dx，dy，dzをそれぞれ独立したデータ行列として構成し，方向成分ごとに解析を行った．

表-1　MPM 解析で用いた斜面の物理定数

解析条件番号	1	2	3	4	5
斜面角度β(°)	20				
内部摩擦角ϕ(°)	0	5	10	15	20
粘着力c (kN/m²)	63.18	34.53	16.87	7.848	0
材料点数	247500				
密度(kg/m²)	2000				
ヤング率(GPa)	0.1				
ポワソン比	0.3				

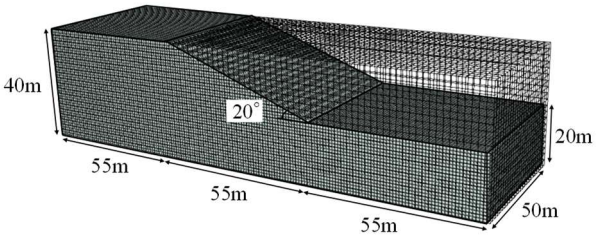


図-1　MPM 解析で用いた斜面モデル

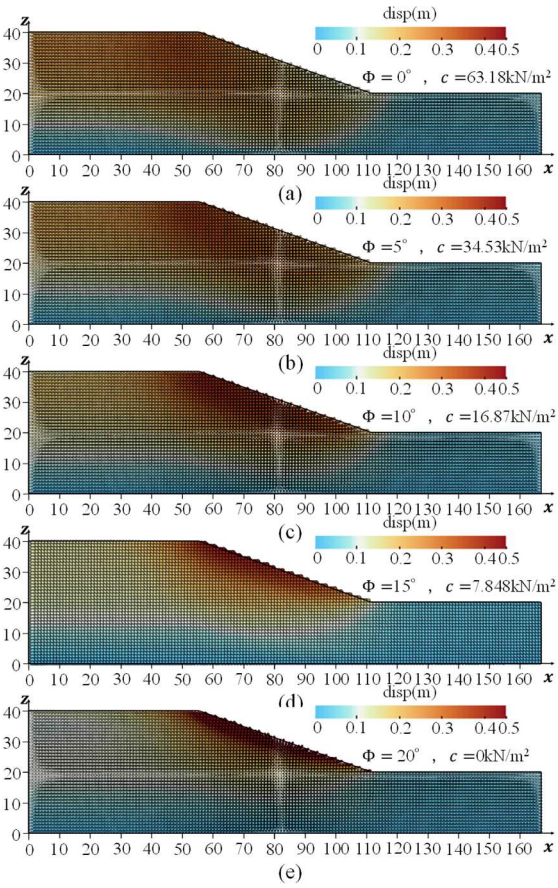


図-2　3 次元 MPM 解析結果の断面図(y=25m)
(a)解析条件 1 (b)解析条件 2 (c)解析条件 3
(d)解析条件 4 (e)解析条件 5

4. 解析結果

(1) MPM 解析結果

図-2 に各解析条件で得られた 3 次元 MPM 解析結果を示す．斜面内部の崩壊挙動を確認するため，y=25m における斜面断面図を示している．内部摩擦角ϕ=0°（解析条件 1）では材料点の移動量は小さいものの，円弧状の滑動挙動とともに斜面上端の沈下も確認された．一方，内部摩擦角ϕ=20°(解析条件 5)では表層すべりが確認され，粘着力および内部摩擦角の組み合わせを変化させた各解析条件において，滑動面が上部へ移行する傾向を示した．また，解析条件 1 から 4 における最大変位量は，それぞれ 0.335m, 0.367m, 0.417m, 0.447m と緩やかに増加し，解析条件 5 では 1.008m へと著しく増加した．

(2) 特異値分解に基づくモード解析

a) データ構成 1

図-3 に，空間モード解析によって得られた各モードの寄与率を示す．第 1 固有モードの寄与率は 95.36%，第 2 固有モードの寄与率は 3.96%であり，第 1 固有モードの寄与が非常に大きい．第 2 固有モードまでで 99%以上の情報量を有していた．

図-4 に，(a)第 1 固有モードと(b)第 2 固有モードの空間モードを示す．第 1 空間モードでは，円弧状の滑動挙動および斜面上端の沈下と対応する変位分布が確認され，斜面崩壊全体を支配する主要な変位モードであると考えられる．また，第 2 空間モードでは，変位分布が斜面表層付近を中心とした局所的な変位分布が抽出され，第 1 空間モードでは表現できない解析条件による崩壊形態の違いを表す補助的な変位モードを表すと考えられる．図-5 は第 1 固有モードおよび第 2 固有モードのモード係数を示した

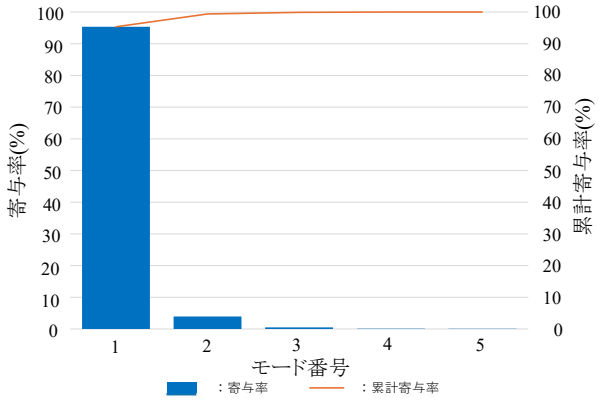


図-3　データ構成 1　寄与率

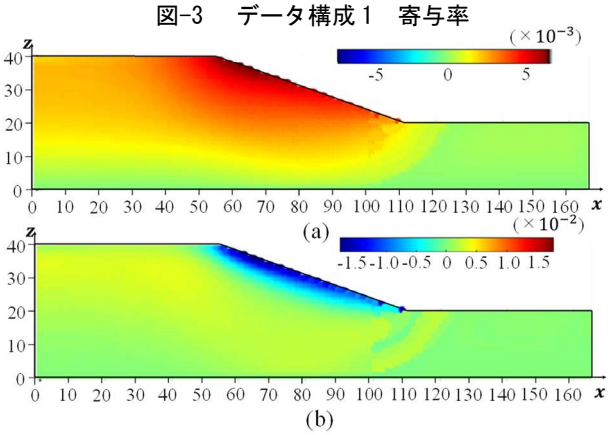


図-4　データ構成 1　空間モードの断面図(y=25m)
(a) 第 1 固有モード (b) 第 2 固有モード

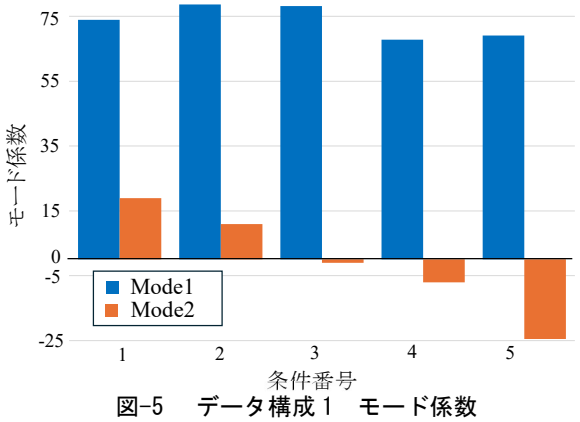


図-5　データ構成 1　モード係数

ものである．解析条件の違いはモード係数に現れた．第 1 固有モードのモード係数は 67.83~78.70 の値を示し，標準偏差は 5.01 と比較的小さかった．よって，いずれの解析条件についても第 1 固有モードの寄与は比較的一様であるといえる．一方，第 2 固有モードのモード係数は 18.87（解析条件 1）から-24.54（解析条件 5）へ平均して 10.85 ずつ減少する傾向が見られた．これは，解析条件の変化に伴い，第 2 固有モードが表す変位モードの寄与が系統的に変化することを示している．このように MPM 解析結果に特異値分解を用いたモード分析を適用することで，斜面崩壊挙動を支配的な空間モードとそれに対応するモード係数に分解し，複雑な崩壊挙動を構成する特徴的な変位モードを個別に分析することができた．

b） データ構成 2

データ構成 2 では，方向成分ごとにデータ行列を作成し，特異値分解を行った．

図-6 に，*dx*方向について，空間モード解析によって得られた各モードの寄与率を示す．第 1 固有モードの寄与率は 88.54%，第 2 固有モードの寄与率は 9.73%であった．

図-7 は，*dx*方向における (a) 第 1 固有モード (b) 第 2 固有モードの空間モードである．黒線は斜面崩壊前の初期状態を表し，図中の変形量は得られた固有モードの値を 1000 倍して表示している．第 1 空間モードは円弧状の滑動挙動に対応する支配的な変位モードが確認された．一方，第 2 空間モードでは，斜面表層部の局所的な変位分布を示しており，第 1 空間モードでは表現できない解析条件の違いを表す補助的な変位モードであると考えられる．**図-8** は第 1 固有モードおよび第 2 固有モードのモード係数を示したものである．第 1 固有モードについては 31.01~47.13 の値を示し，標準偏差は 6.40 であった．また，第 2 固有モードについてはデータ構成 1 と同様，16.89（解析条件 1）から-21.28（解析条件 5）へ減少する傾向が見られた．

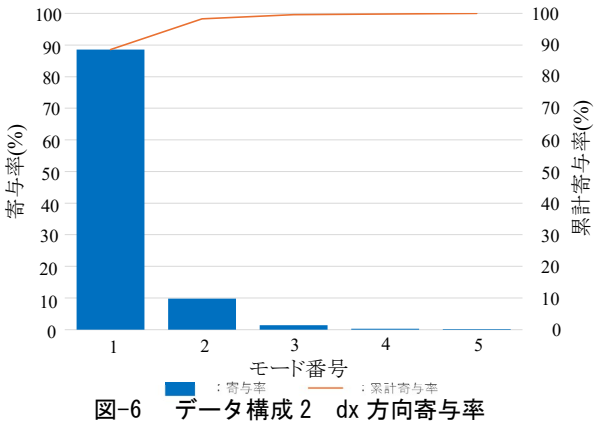


図-6　データ構成 2　dx 方向寄与率

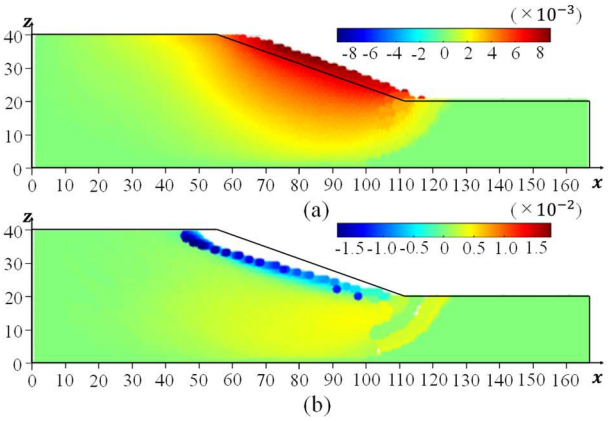


図-7　データ構成 2　dx 方向空間モードの断面図 (y=25m)
(a) 第 1 固有モード (b) 第 2 固有モード

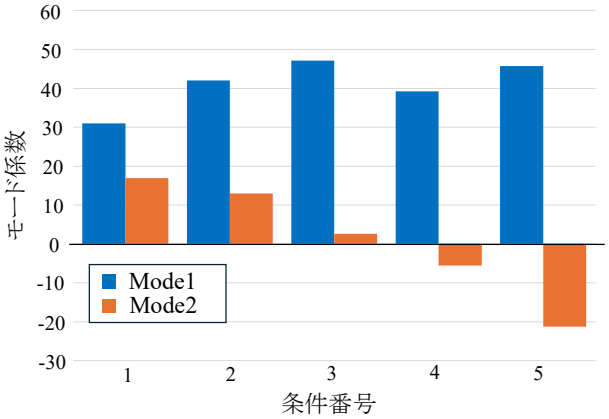


図-8　データ構成 2　dx 方向モード係数

次に，*dy*方向について，各モードの寄与率を示す（**図-9**）．第 1 固有モードの寄与率は 56.59%，第 2 固有モードの寄与率は 35.77%，第 3 固有モードの寄与率は 4.29%であった．

図-10 に，*dy*方向における (a) 第 1 固有モード (b) 第 2 固有モードの空間モードを示す．図中の変形量は得られた固有モードの値を 1000 倍して表示している．*y*=25m における断面図では粒子の挙動を十分に確認することができなかったため，3 次元空間モードを示した．**図-11** は第 1 固有モードおよび第 2 固有モードのモード係数である．第 1 固有モードでは 4.24~-2.40 と他の方向成分に比べ小さい値で推移

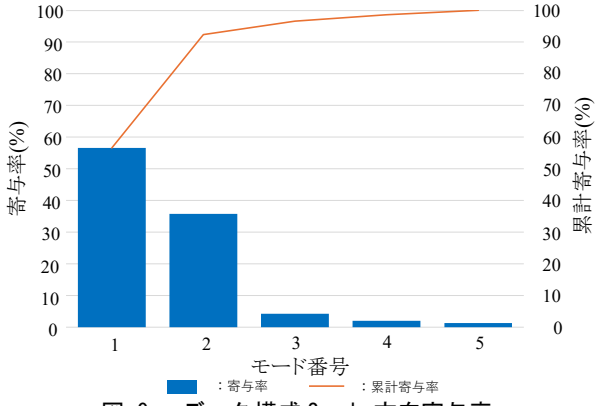


図-9　データ構成 2　dy 方向寄与率

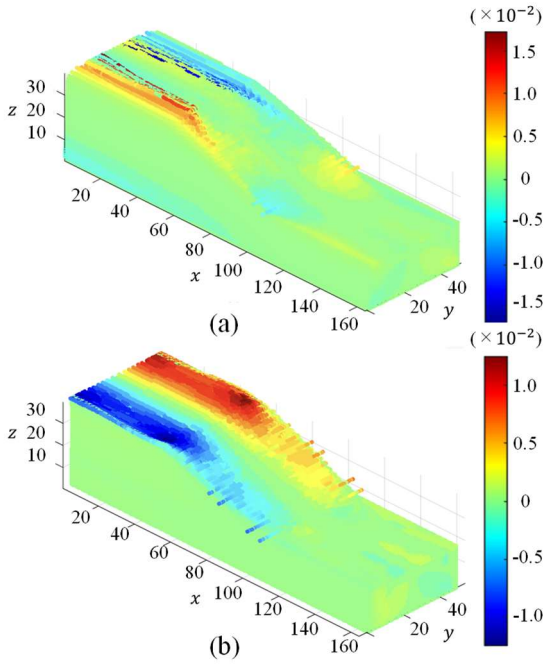


図-10　データ構成 2　dy 方向 3 次元空間モード
(a) 第 1 固有モード (b) 第 2 固有モード

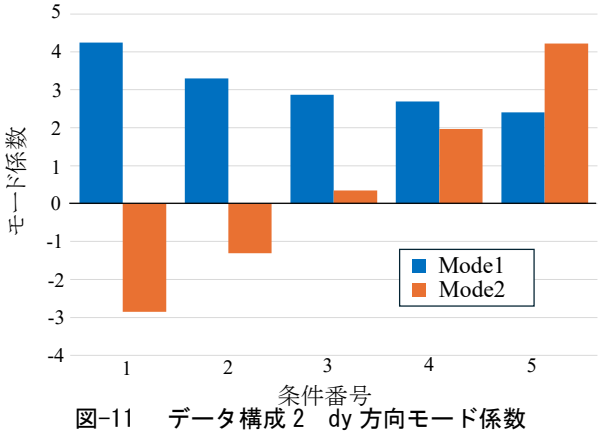


図-11　データ構成 2　dy 方向モード係数

した．第 2 固有モードでは，解析条件 1 において-2.85 と負の値を示すものの，正方向へ増加する傾向を示した．本解析では dy 方向の変位は dx 方向および dz 方向と比較して小さく，dy 方向に現れた空間モードについては，微小変位や数値誤差，特異値分解に伴う残差成分の影響を含む可能性があることから，本研究では物理的な解釈は行わないこととした．

図-12 に，*dz*方向の各モードの寄与率を示す．第 1 固有モードの寄与率は 98.23%，第 2 固有モードの寄与率は 1.61%と，第 1 固有モードの寄与が非常に大きかった．

図-13 に，*dz*方向における(a)第 1 固有モード(b)第 2 固有モードの空間モードを示す．*dx*方向と同様，黒線は斜面崩壊前の初期状態を表し，図中の変形量は得られた固有モードの値を 1000 倍して表示している．第 1 空間モードの空間モードは全体的に負の値を示した．また，法肩部で比較的大きな値を示したものの，天端から斜面の中腹部にかけては，地表面から深さ 30m 付近まで一様に変位するモードが得られた．**図-14** に第 1 固有モードおよび第 2 固有モードのモード係数を示す．第 1 固有モードでは 51.64~-66.64 の値を示し，解析条件 1 から解析条件 5 にかけて減少する傾向が見られた．このことから，*dz*方向の主要な変位挙動を表す第 1 固有モードは，内部摩擦角ϕ=0°である解析条件 1 において強く表れ，その後解析条件の変化に伴って徐々に弱まる傾向を示したと考えられる．一方，第 2 固有モードについては，空間モードより斜面表層部における変位が確認された．また，第 2 固有モードのモード係数は第 1 固有モードと比較して-10.43~11.82 と小さかった．

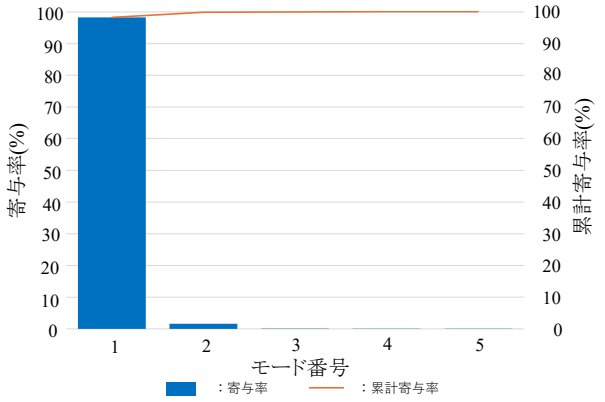


図-12　データ構成 2　dz 方向寄与率

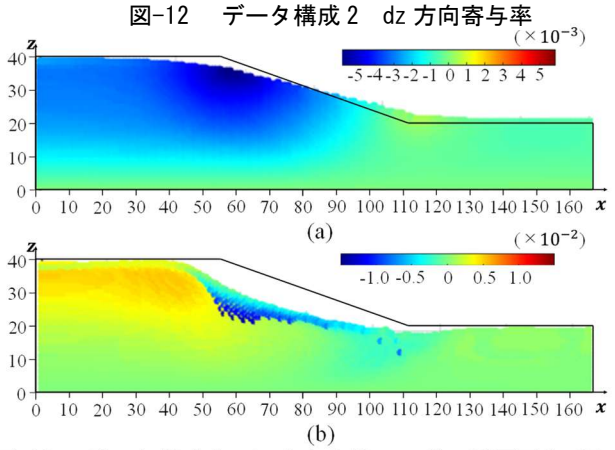


図-13　データ構成 2　dz 方向空間モードの断面図(y=25m)
(a) 第 1 固有モード (b) 第 2 固有モード

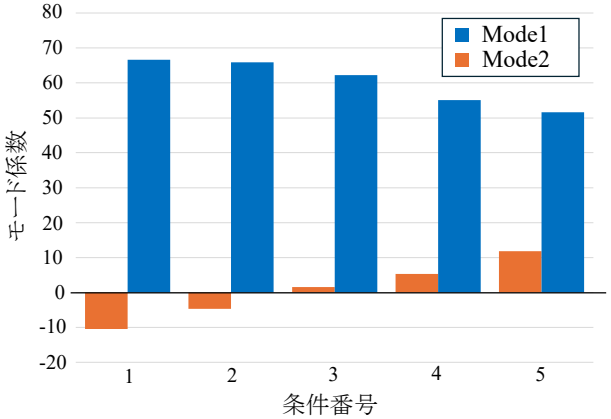


図-14　データ構成 2　dz 方向モード係数

c）データ構成の比較

データ構成 1 では，各粒子の 3 次元移動変位$disp$を用いることで，斜面全体の変形挙動を統合的に把握することができた．特に，第 1 空間モードとして斜面全体を支配する変位モード，第 2 空間モードとして第 1 空間モードでは表現できない局所的な変位モードが抽出され，2 つのモードによって崩壊後の変位場を高い寄与率で表現できた．また，第 1 固有モードのモード係数は解析条件の違いによらず比較的一定であった一方，第 2 固有モードのモード係数は解析条件 1 から解析条件 5 にかけて系統的に減少する傾向を示した．データ構成 1 では，3 次元移動変位を一括して扱うため，各方向成分の寄与を個別に評価することは困難であった．

一方，データ構成 2 では，dx，dy，dz方向を独立して解析することで，各方向成分における変位特性を詳細に評価できた．dx方向では，データ構成 1 と同様に，支配的な変位モードおよび局所的な変位モードが確認され，斜面崩壊に伴う水平方向変位の特徴を抽出できた．また，dz方向では，第 1 固有モードの寄与率が 98%以上と極めて大きく，鉛直方向変位が単一の主要モードによって支配されているといえる．一方，dy方向では，他方向と比較してモード係数が小さく，数値誤差や特異値分解に伴う残差成分などの影響が含まれる可能性があることから，物理的な解釈は行わなかった．また，これらのデータ構成を比較することで，本研究で用いた解析条件下における斜面崩壊では，粒子の変位は主としてdxおよびdz方向に生じていることが明らかになった．

以上より，データ構成 1 は崩壊後の斜面全体の支配的な崩壊挙動を簡潔に把握する上で有効であり，データ構成 2 は各方向成分の変位特性を個別に把握する上で有効であることが確認できた．また，本研究で抽出した空間モードは，MPM 解析によって得られた斜面崩壊後の変位場を特徴づける支配的な変位モードを表しており，崩壊後の変位場を少数のモードで表現できることが明らかになった．さらに，崩壊後の変位場には破壊後の形状や土砂の到達範囲に関する情報が含まれていることから，再構成式を利用したこれらの推定への応用が期待される．

5. 結論

本研究では，単層均一地盤の 3 次元 MPM 解析結果に対して特異値分解に基づくモード解析を適用し，崩壊後の変位場を支配的な空間モードとモード係数に分解するとともに，データ構成の違いについて検討した．本研究で得られた知見を以下に示す．

1) 各粒子の 3 次元移動変位$disp$を用いたデータ構成 1 では，第 1 空間モードとして斜面全体を支配する変位モード，第 2 空間モードとして局所的な変位モードが抽出され，崩壊後の変位場を少数のモードを用いて高い精度で表現できることを示した．
2) dx，dy，dzを独立したデータ行列として構成することで，各方向成分における変位特性を詳細に評価できた．
3) 本研究で得られたモードは崩壊後の変位場を低次元で表現可能であり，再構成式を利用することで土砂の到達範囲の推定などへの応用が期待される．今後は，そのためのデータ構成や推定手法についてもさらに検討を進める予定である．

また，本研究では均一地盤を対象としたが，今後は粘着力，内部摩擦角および単位体積重量に不均質性を導入した不均一地盤へと解析条件の拡張を行う予定である．不均一地盤では，局所的な地盤特性の違いに起因して，均一地盤よりも複雑な変形，崩壊挙動が生じると考えられる．そのため，本研究で検討したデータ構成を基に，不均一地盤の特徴を適切に抽出可能なデータ構成方法について，さらに検討を進める予定である．

参考文献

1) Bardenhagen S. G. and Kober E. M.: The generalized interpolation material point method, Computer Modeling in Engineering and Science, Vol.5, No.6, pp.447-495, 2004.
2) Sulsky D., Chen Z. and Schreyer, H. L.: A particle method for history-dependent materials, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.118, pp.179-196, 1994.
3) 桐山貴俊：Material Point Method を用いた地盤材料の大変形解析，清水建設研究報告，第 92 号，pp.87-98，2015.
4) 福谷陽，森田周二，寺田賢二郎，鴨原良典：津波荷重評価に用いる水深係数のモード分解による空間的不確実性評価，土木学会論文集 B2（海岸工学），Vol.76, No.2，p.I_295-I_300，2020.
5) 福岡正巳，村田清二，今野誠：新編土質工学，株式会社国民科学社，pp.251-268，1984.
6) 余軍炎：GPU 並列 MPM を用いた地震時斜面崩壊の確率的リスク評価，博士論文，九州大学，2025.

（2026.5.29　受付）