

# 積分計算とシミュレーションによる木橋の破壊確率

平沢 秀之<sup>1</sup>・荒木 昇吾<sup>2</sup>・千葉 拓也<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 函館高専教授 社会基盤工学科 (〒042-8501 函館市戸倉町 14 番 1 号)  
E-mail:hide@hakodate-ct.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 服部エンジニア(株) (〒420-0053 静岡市葵区弥勒 2-2-12)  
E-mail:s-araki@hattori-eng.co.jp

<sup>3</sup>千葉大学工学部都市環境システム学科 3 年 (〒263-8522 千葉県千葉市稲毛区弥生町 1-33)

木材は生物材料であるため、鋼材と比較して強度のばらつきが大きい。木材を橋梁の主要材料として使用するとき、その耐荷力は材料強度のばらつきを十分考慮する必要がある。一方、橋梁に作用する活荷重もばらつきを有する。従来の橋梁設計においては、両者のばらつきを許容応力度に含めた許容応力度法が用いられてきた。この方法は計算が簡便である利点があるが、橋梁の性能や安全性の程度を明確に示すことが困難であり、要求性能を満足するかを照査する性能照査型設計法には不向きな方法である。本研究は、橋梁の性能の一つである破壊確率に着目し、材料強度のばらつき、荷重のばらつきを考慮して関数で表示し、それらの 2 重積分を実行することにより破壊確率を算出した。得られた結果及び算出過程は、破壊確率を考慮する設計法への基礎資料を与える。

**Key Words:** failure probability, timber bridge, Gumbel distribution, double integral, simulation

## 1. はじめに

橋梁を性能照査型設計法で設計する場合、要求性能を満たすことの検証方法として破壊確率に基づく信頼性設計法を用いることが望ましい<sup>1)</sup>。この方法によれば、目標とする性能を数値で規定し、不等式で照査式を与え、性能を満足する部材断面を求めることが理論的には可能である。しかし、実際に橋梁を設計しようとすると、種々の数値の取り扱いや計算そのものの難しさに直面し、設計の困難さが露呈する。限界状態設計法は、部分安全係数を用いて計算を容易にさせる方法であり、信頼性設計法のレベルⅠに該当する。計算方法が簡便である反面、破壊確率(限界状態に達する確率)の精度は低くなる。一方、レベルⅢは、破壊確率を直接算出する手法で、破壊確率の精度が高いが、不確定要因の確率分布形が既知である必要があることと、計算に積分を伴うため、一般には容易に破壊確率を得ることが困難である<sup>2)</sup>。

構造設計が仕様規定型から性能照査型へ進む際、照査フォーマットとして厳密さを重視するなら、レベルⅢの方法を採用することが望ましい。そこで、本研究では木橋の設計において未だ採用されていないレベルⅢ信頼性設計法を用い、厳密な破壊確率の算定を試みる。計算対象とする木橋は、RC床版を有する単純非合成桁橋とし、

主桁には集成材を用いるものとする。主桁は等断面とし、支間中央断面が曲げ破壊、すなわち集成材の曲げ強度に達した状態(限界状態)になる確率を求める。確率を算定するために設定する不確定要因は、輪荷重と集成材の材料強度の2つとする。これらはそれぞれ平均値と標準偏差で表現できるものとする。それぞれの不確定要因から、支間中央断面での作用曲げモーメントと抵抗曲げモーメントの分布を関数で与え、積分計算の実行により破壊確率を算定する。

ここで得られた破壊確率が妥当かを確かめるために、数値シミュレーション<sup>3)</sup>によって得た破壊確率と比較する。作用曲げモーメントと抵抗曲げモーメントの分布を再現させる十分な数の乱数を生成し、破壊状態となる乱数の組み合わせ数をカウントすることにより破壊確率を得る。

## 2. 破壊確率の計算式

橋梁に負荷される活荷重は、軽車両から大型車両まで重量にばらつきがあるため、活荷重による主桁断面の曲げモーメントにもばらつきがある。一方、集成材の抵抗曲げモーメントにもばらつきがある。ここでは、荷重と

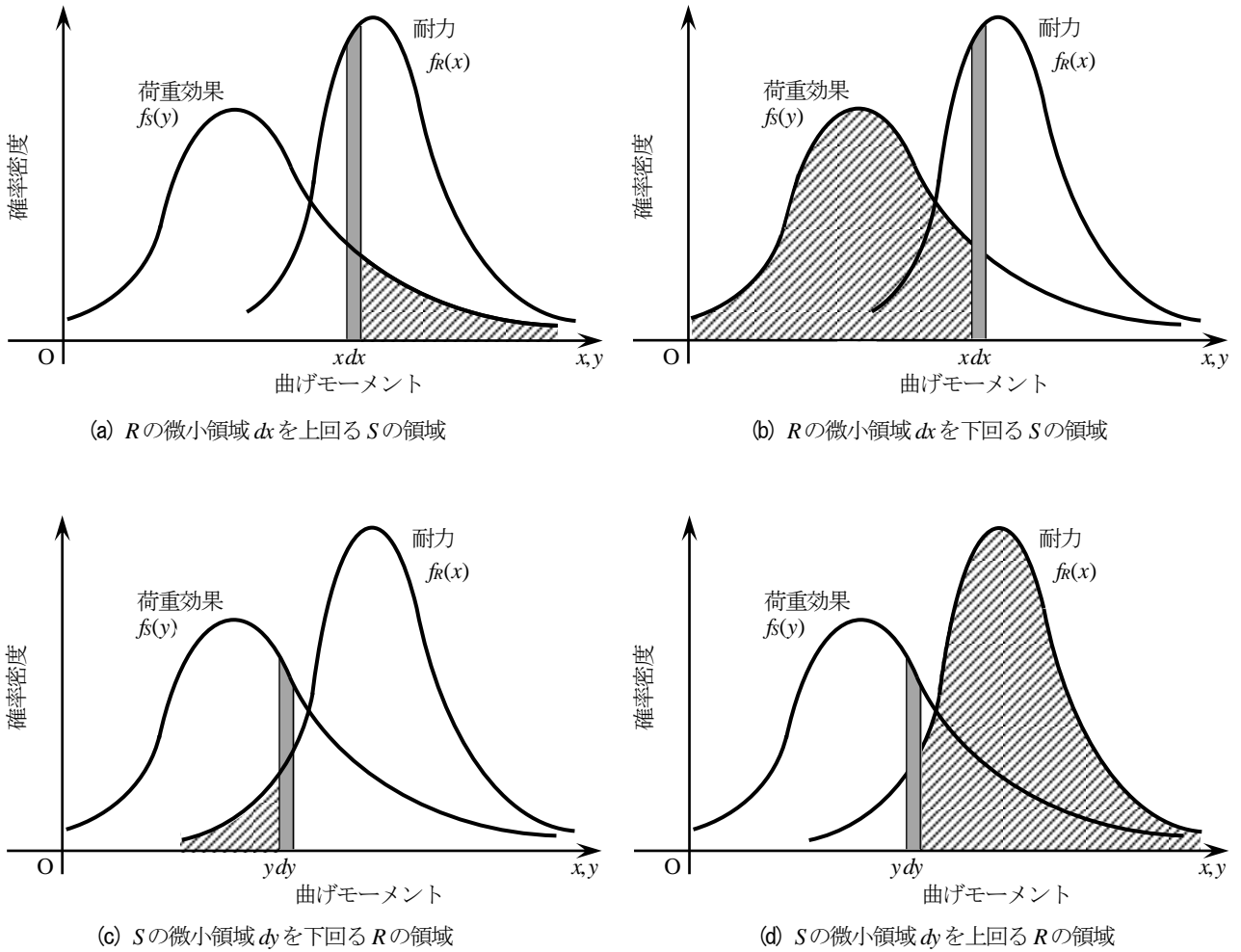


図-1 荷重効果・耐力分布

してばらつきを有する輪荷重(T荷重)+衝撃，ばらつきを有しない死荷重を採用し，これらの荷重から得られる曲げモーメント(作用曲げモーメント)を，荷重効果Sとする．また，主桁の強度として，集成材の曲げ強度から定まる曲げモーメント(抵抗曲げモーメント)を，耐力Rとする．図-1に荷重効果と耐力の分布関数 $f_S(y)$ ， $f_R(x)$ の概略を示す．

図-1(a)は，ある耐力 $x$ (灰色部)に対し，それを上回る荷重効果の領域が斜線で表されている．破壊が生じるのは $S > R$ の場合と定義すると，耐力がある $x$ のとき，荷重効果 $y$ がそれを超える場合が破壊である．したがって，

灰色部の面積 $= dx f_R(x)$ と斜線部の面積 $= \int_x^\infty f_S(y) dy$ との積は，任意の $x$ に対する破壊確率を表す．この $x$ の定義域を $[-\infty, \infty]$ とすると，主桁の破壊確率は次式の2重積分で与えられる．

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} f_R(x) \left\{ \int_x^{\infty} f_S(y) dy \right\} dx \quad (1a)$$

一方，図-1(b)は，ある耐力 $x$ (灰色部)に対し，それを

下回る荷重効果の領域が斜線部である．したがって，灰色部の面積 $= dx f_R(x)$ と斜線部の面積 $= \int_{-\infty}^x f_S(y) dy$ との積は，任意の $x$ に対して破壊しない確率を表す．この場合，破壊確率は次式で表される．

$$p = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_R(x) \left\{ \int_{-\infty}^x f_S(y) dy \right\} dx \quad (1b)$$

同様に，図-1(c)及び(d)より，主桁の破壊確率は式(1c)，(1d)でも表すことができ，これら4つの式で同一の結果を得ることができる．

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(y) \left\{ \int_{-\infty}^y f_R(x) dx \right\} dy \quad (1c)$$

$$p = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_S(y) \left\{ \int_y^{\infty} f_R(x) dx \right\} dy \quad (1d)$$

本研究では，破壊確率の計算を解析的な積分計算で行うため，計算の便を考慮して，式(1a)の方法を採用することとする．

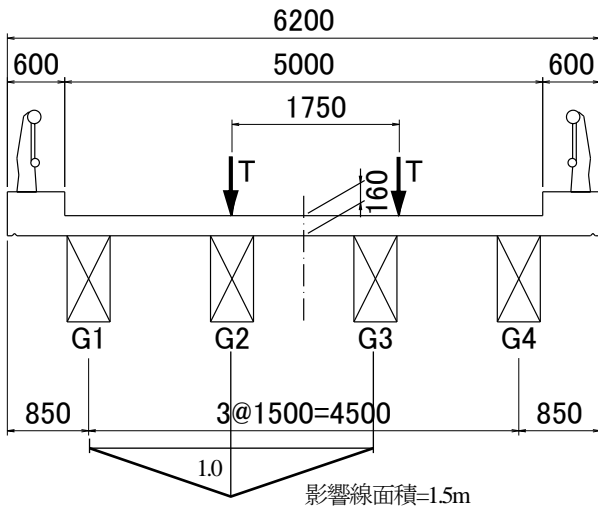


図-2 集成材桁橋断面図

### 3. 計算対象とする木橋

破壊確率の計算対象とする木橋は、図-2のような断面形状を有するRC床版単純非合成集成材桁橋とする。主桁材料として、強度等級がE105-F300の集成材を使用する。集成材の曲げ強度は正規分布をなすと仮定し<sup>4)</sup>、平均値、標準偏差をそれぞれ、39.00[N/mm<sup>2</sup>]、5.85[N/mm<sup>2</sup>]とする<sup>5)</sup>。これらの定数<sup>6)</sup>およびその他の構造諸元をまとめて表-1に示す。

### 4. 荷重効果

#### (1) 死荷重

主桁、床版、アスファルト舗装の単位体積重量から、主桁G2の支間中央断面に作用する荷重 $W_d$ を、荷重分配影響線を利用して算出する。その結果を表-2に示す。死荷重 $W_d$ による支間中央断面の曲げモーメント $M_d$ は次式の通りとなる。ここで、 $L$ は支間長である。

$$M_d = \frac{W_d L^2}{8} = 25.1444 \text{ [kNm]} \quad (2)$$

#### (2) 活荷重

活荷重は参考文献7)に記載された小山跨道橋の測定結果を利用する。測定データは軸重であるため、これを輪荷重に換算し、ヒストグラムで表すと図-3のようになる。グラフの全面積が1となるように縦軸を補正している。

実測データから輪荷重の平均値と標準偏差は表-3の通りとなった。図-3にはこれらの平均値と標準偏差となるガンベル分布も表している。ガンベル分布は実測値に非常に良くフィットしているが、負の領域にまで分布

表-1 構造諸元、材料・荷重に関する定数

構造諸元 [m]		材料・単位体積重量 [kN/m <sup>3</sup> ]		
支間長	5.000	主桁	E105-F300	8.000
全幅員	6.200	床版	RC	24.500
有効幅員	5.000	舗装	アスファルト	22.500
床版厚	0.160	主桁[m]	桁幅	0.220
舗装厚	0.050		桁高	0.272
集成材 (曲げ強度は正規分布と仮定)				
曲げ強度の平均値 [N/mm <sup>2</sup> ]			39.00	
曲げ強度の標準偏差 [N/mm <sup>2</sup> ]			5.85	

表-2 死荷重曲げモーメントの算定

アスファルト舗装 [kN/m]	1.6875
RC床版 [kN/m]	5.8800
主桁 [kN/m]	0.4787
合計(G2に作用する死荷重) [kN/m] $W_d =$	8.0462

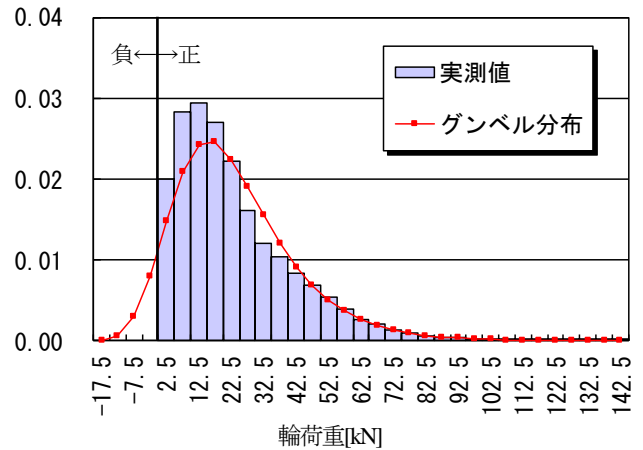


図-3 輪荷重分布

している点と異なっている。ここでは、参考文献8)に基づき活荷重の分布関数としてガンベル関数を採用する。

#### (3) 作用曲げモーメント

支間長 $L$ の桁の支間中央断面に輪荷重 $P$ が作用したときの支間中央断面曲げモーメント $M_i$ は次式により求められる。

$$M_i = \frac{PL}{4} \quad (3)$$

また、衝撃による曲げモーメント $M_i$ は次式により求められる。ここで、衝撃係数 $i$ は表-3の値を用いる。

$$M_i = i \times M_i \quad (4)$$

表-3 活荷重(輪荷重)

輪荷重の平均値 [kN]	23.917
輪荷重の標準偏差 [kN]	19.028
衝撃係数 $i$	0.36

表-4 作用曲げモーメントの算定

死荷重曲げモーメント $M_d$ [kNm] =	25.144
活荷重曲げモーメントの平均値 $M_l$ [kNm] =	29.896
活荷重曲げモーメントの標準偏差 $\sigma_{Ml}$ [kNm] =	23.785
衝撃による曲げモーメント $M_i$ [kNm] =	10.763
$M_S = M_d + (M_l + M_i)$ の平均値 $\mu_S$ [kNm] =	65.803
$M_S = M_d + (M_l + M_i)$ の標準偏差 $\sigma_S$ [kNm] =	32.348

よって、作用曲げモーメント  $M_S$  はこれらをすべて合計した次式により求められる。

$$M_S = M_d + (M_l + M_i) \quad (5)$$

輪荷重  $P$  の平均値と標準偏差から式(5)を利用して作用曲げモーメント  $M_S$  の平均値  $\mu_S$  と標準偏差  $\sigma_S$  を求めると、表-4の通りとなる。

作用曲げモーメントをグンベル分布で近似させると、式(6)の  $f_S(x)$  で表される。パラメーター  $a, b$  は式(7)により得られる。ここで、 $\gamma = 0.5772 \dots$  (オイラー数)である。

$$f_S(x) = cae^{-a(x-b)}e^{-e^{-a(x-b)}} \quad (6)$$

$$a = \frac{\pi}{\sigma_S \sqrt{6}} = 0.0396, \quad b = \mu_S - \frac{\gamma}{a} = 51.245 \quad (7a, b)$$

また、パラメーター  $c$  は、輪荷重が負となる領域 ( $x < M_d$ ) の面積を除くと、確率密度関数の性質 ( $x$  軸との間の

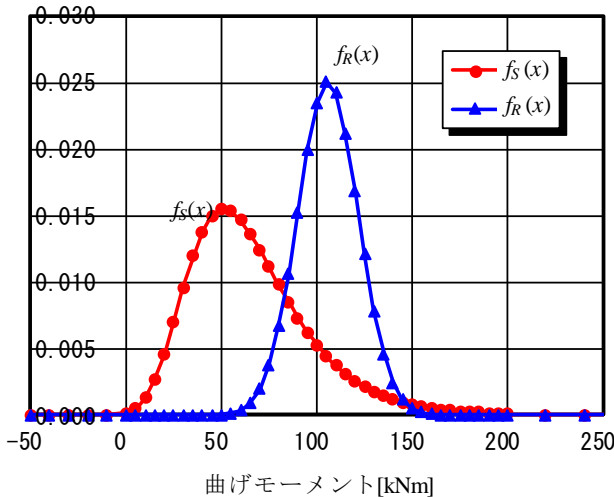


図-4 主桁の荷重効果分布  $f_S(x)$  と耐力分布  $f_R(x)$

表-5 抵抗曲げモーメントの算定

集成材の曲げ強度	平均値 $\mu$ [N/mm <sup>2</sup> ] =	39.00
	標準偏差 $\sigma$ [N/mm <sup>2</sup> ] =	5.85
主桁の抵抗曲げモーメント	平均値 $\mu_R$ [kNm] =	105.80
	標準偏差 $\sigma_R$ [kNm] =	15.87

面積の合計が1)に反するため、 $M_d < x < \infty$  の領域における面積が1となるよう調整するための係数である。  $c$  は式(8)より求める。

$$c = \frac{1}{\int_{25.144}^{\infty} ae^{-a(x-b)}e^{-e^{-a(x-b)}} dx} = 1.0637 \quad (8)$$

以上により作用曲げモーメントの分布  $f_S(x)$  が定まる。これを図示すると、図-4の●の曲線となる。

## 5. 耐力

桁幅  $b$ 、桁高  $h$  の長方形断面を有する桁に作用する曲げモーメント  $M$  と縁応力  $\sigma$  の関係は次式の通りである。

$$\sigma = \frac{M}{bh^3} \left( \frac{h}{2} \right) \quad \therefore M = \frac{bh^2}{6} \sigma \quad (9)$$

ここで、 $\sigma$  に集成材の曲げ強度<sup>4)</sup>を代入して、抵抗曲げモーメントを得る。計算結果を表-5に示す。この抵抗曲げモーメントを正規分布で近似させると式(10)の  $f_R(x)$  で表される。

$$f_R(x) = \frac{1}{\sigma_R \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_R)^2}{2\sigma_R^2}} \quad (10)$$

式(10)の曲線を図-4の▲の曲線で示す。

## 6. 破壊確率

本研究で対象とする木橋は、図-2のような4主桁橋で、各主桁間での荷重分配は図中の影響線で示すように1-0法(簡易法)によるものとする。したがって、主桁直上に載荷される荷重は、他の主桁に分配されないと仮定する。もし、荷重により直下の主桁が破壊した場合、その荷重は上記の仮定により橋梁全体で抵抗することができない。よって、ここでは1本の主桁の破壊が橋梁全体の破壊と

見なすこととする。すなわち、1本の主桁において、 $S > R$ を満たす確率(式(1)で計算される確率)を橋梁の破壊確率とする。

(1) 積分計算による破壊確率の算定

式(1)に式(6)と式(10)を代入して計算を行う。ここで、 $x$ の積分区間は $[-\infty, \infty]$ ではなく、活荷重が0のときの作用曲げモーメント(= $M_d$ )から、すなわち  $[M_d, \infty]$ とする。

$$\begin{aligned}
 p &= \int_{M_d}^{\infty} f_R(x) \left\{ \int_x^{\infty} cae^{-a(y-b)} e^{-e^{-a(y-b)}} dy \right\} dx \\
 &= \int_{M_d}^{\infty} f_R(x) \left\{ \left[ ce^{-a(y-b)} \right]_x^{\infty} \right\} dx \\
 &= \int_{M_d}^{\infty} f_R(x) c \left\{ 1 - e^{-a(x-b)} \right\} dx \\
 &= \int_{M_d}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sigma_R \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_R)^2}{2\sigma_R^2}} \right\} c \left\{ 1 - e^{-a(x-b)} \right\} dx \quad (11)
 \end{aligned}$$

これ以上は解析的に積分実行が困難であるため、数値積分を行うこととする。式中の定数は式(7), (8)及び表-4, 5の値を用いる。数値積分には台形公式とシンプソンの公式を使用した。計算結果を表-6に示す。分割数を増加させると両公式の結果はほぼ一致し、破壊確率は $p \approx 0.135$ となった。

(2) シミュレーションによる破壊確率の算定

破壊確率算定の別解として、乱数によるシミュレーションを実施した。グンベル分布をなす乱数を10000個生成して、輪荷重 $P$ とした。その輪荷重から式(5)を用いて、作用曲げモーメント(荷重効果 $S$ )を算出した。また正規分布をなす乱数を10000個生成して、集材材の曲げ強度(式(9)の $\sigma$ )とした。その曲げ強度から抵抗曲げモーメント(耐力 $R$ )を算出した。

図-5は得られた $S$ と $R$ をヒストグラムにまとめたものである。図-4とほぼ同様の分布形状をなしている。 $S$ については、負の値を生成させた場合を除くため、10000個より少ない9365個を採用することとした(表-7参照)。破壊確率は、 $S$ と $R$ の値を比較し $S > R$ となる組み合わせの個数を総組み合わせ数で除した値となる。ここで、総組み合わせ数は、 $S$ の個数(9365)  $\times$   $R$ の個数(10000) = 93,650,000となる。

得られた破壊確率は、表-7のように0.13285となった。乱数発生パターンを変化させて同様に破壊確率を求めると、0.1356, 0.1342等となり、積分により求めた0.1353(表-6参照)に非常に近い値となった。

表-6 数値積分

分割数 $n$ (偶数)	計算結果(破壊確率)	
	台形公式	シンプソンの公式
64	0.13526733	0.13551904
128	0.13526753	0.13526760
256	0.13526759	0.13526762
512	0.13526761	0.13526762
1024	0.13526762	0.13526762
2048	0.13526762	0.13526762

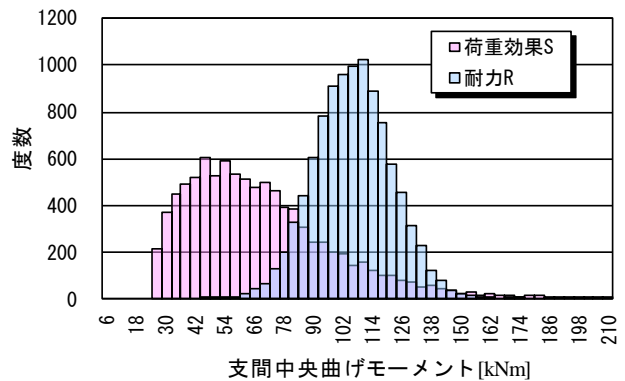


図-5 シミュレーションによる $S$ と $R$ の分布

表-7 シミュレーション結果

荷重効果 $S$ 発生回数 (除外した数を削除)	9365
耐力 $R$ 発生回数	10000
総組み合わせ数(計算回数)	93,650,000
$S > R$ (破壊)の回数	12,441,722
破壊確率 $p$	0.13285

7. おわりに

活荷重と材料強度を、平均値と標準偏差で表すことのできる分布関数で与え、積分を実行して木橋の破壊確率の計算を試みた。荷重分布に用いたグンベル分布は被積分関数が既知であるため、2重積分を1重積分にすることができたが、その先は解析的に求まらないため、数値積分により算出した。破壊確率はシミュレーションからも得ることができ、両者の値は非常に良く一致した。

活荷重の分布関数としてグンベル分布を採用したが、その定義域が負の領域を含んでいるため、パラメーター $c$ を用いる補正を行った。シミュレーション結果と良く一致したことから、この補正法が妥当であったと考えられる。

本研究では、主桁断面を 220×272 [mm] の 1 ケースに限定して破壊確率の算定を試みた。その結果、破壊確率が  $p \doteq 0.135$  となり、現実の橋梁断面として当然採用すべきものではない計算結果が得られた。将来的に性能照査型設計が本格化した際、あらかじめ示される要求性能（破壊確率またはそれに類する指標）を満たすよう断面が決められることとなる。本研究は、性能照査型設計法における照査フォーマットの一手法として提案できる。

#### 参考文献

- 1) 国土交通省：土木・建築にかかる設計の基本，2002.
- 2) 星谷勝，石井清：構造物の信頼性設計法，鹿島出版会，1986.
- 3) 齊藤貴信，平沢秀之：木橋の破壊確率シミュレーション，土木学会北海道支部論文報告集第 63 号，A-31，2007.
- 4) 町田篤彦，関博，薄木征三，増田陳紀，姫野賢治，渡辺邦夫：土木材料学，オーム社，2011.
- 5) 日本建築学会：木質構造限界状態設計指針(案)，丸善，2003.
- 6) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説 I 共通編，丸善，2012.
- 7) 玉越隆史，中洲啓太，石尾真理：道路橋の設計自動車荷重に関する試験調査報告書－全国活荷重実態調査－，国土技術政策総合研究所資料，No.295，2006.
- 8) 土木学会鋼構造委員会木橋技術小委員会：木橋技術の手引き 2005，土木学会，2005.

(2017.8.31 受付)

## FAILURE PROBABILITY FOR A TIMBER BRIDGE BY INTEGRATION AND SIMULATION

Hideyuki HIRASAWA, Shogo ARAKI and Takuya CHIBA

There is much unevenness in strength of timber compared with steel material. The load carrying capacity of timber bridge has to include the effect of this unevenness if the timber is used as essential members. On the other hand, live loads on the bridge also vary. In the bridge design as usual, allowable stress design method is adopted where the margin for unevenness is in the allowable stress. However, this method is not good for the performance-based design of bridge because it cannot explain clearly how the safety of the bridge is. This study takes notice of the failure probability which is one of bridge performance. Two distribution functions are assumed and the integral calculation using these functions is executed to obtain the failure probability. The result is compared with the value from numerical simulation.