

# 扁平格子を用いた格子ボルツマン法による流体解析

東京都立大学 笠原豪  
東京都立大学 新谷哲也

## 1. はじめに

湖沼や沿岸域では水温混合の違いに起因する密度差から重力流が生じており、物質の輸送や混合へ影響を与えていると考えられている。諸水域における生態の解明や水質の管理の観点からこのような水理現象の解明は重要であり、実験や数値計算による研究が行われている。数値手法の中で格子ボルツマン法(Lattice Boltzmann Method:以下 LBM とする)は比較的新しい数値流体解析手法であり、完全な陽解法であることから並列性が高くアルゴリズムが簡便である利点を持つ。従来 LBM での解析では正方格子が用いられてきたが、湖沼や沿岸域のような鉛直スケールが水平スケールに比べて小さい(つまりアスペクト比が大きい)場合、鉛直スケールに十分な空間解像度を確保した際に水平スケールに必要な以上に細かい格子を配置することになってしまい計算コストの観点から問題となる。そこで本研究では扁平な格子を利用した湖沼・沿岸域に適した LBM による流体解析モデルを開発し、交換密度流の解析を既往の研究との解析結果と比較しモデルの精度を確認するとともに、扁平格子を採用することによる計算効率の向上を検証した。

## 2. 数値手法

LBM は流体を仮想粒子に近似し、粒子の衝突と図-1 に示されるような並進を繰り返し計算処理することによって流体の運動を解析する数値計算手法であり、圧力の Poisson 方程式を解かない利点をもつ。LBM では毎時間ステップにおいて、仮想粒子は図-1 のように決まった距離しか移動できない。そのため図-2 のように扁平な格子を配置した場合、並進時に計算点 C が得るのは C から  $\Delta x$  だけ離れた点  $\alpha$  における分布量である。よって本研究では並進処理の前に補間点  $\alpha$  における粒子の分布量を図-2 における計算点 A, B, C の三点の値によって補間計算することによって計算点 C に並進する粒子の分布量を算出する。これは以下の式(1)のように表すことができる。

$$f_{\alpha} = af_A + bf_B + cf_C \quad (1)$$

ここで  $f_{\alpha}$  は図-2 に矢印によって示される補間点  $\alpha$  における粒子の分布量であり  $f_A \sim f_B$  は計算格子点 A~B における粒子の分布量、 $a \sim c$  は補間係数である。

本研究では補間係数  $a \sim c$  は、補間点  $\alpha$  を中心とした計算点 A, B, C の三点で 3 項までテイラー展開を行い、連立方程式を立てて解くことによって得る。図-2 中の補間点  $\alpha$  の粒子の分布量  $f^{\alpha}$  を算出する具体例は以下の通りである。

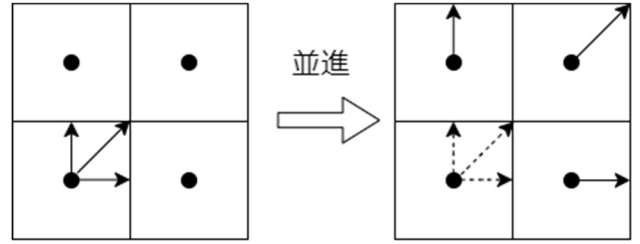


図 1 LBM における仮想粒子の並進

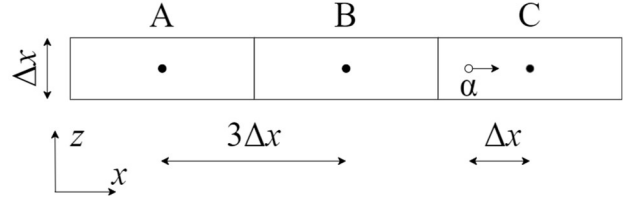


図 2 扁平格子と補間点  $\alpha$

$$\begin{aligned} f_{x_A} &= f_{x_{\alpha}-5\Delta x} \\ &= f_{x_{\alpha}} - 5\Delta x g'_{x_{\alpha}} + \frac{25}{2} \Delta x^2 g''_{x_{\alpha}} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f_{x_B} &= f_{x_{\alpha}-2\Delta x} \\ &= f_{x_{\alpha}} - 2\Delta x g'_{x_{\alpha}} + 2\Delta x^2 g''_{x_{\alpha}} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f_{x_C} &= f_{x_{\alpha}+\Delta x} \\ &= f_{x_{\alpha}} + \Delta x g'_{x_{\alpha}} + \frac{1}{2} \Delta x^2 g''_{x_{\alpha}} \end{aligned} \quad (4)$$

上記式(2)~(4)を基に補間係数  $a \sim b$  を乗算し式を変形することで以下の得る。

$$af_{x_{\alpha}} = a \left( f_{x_A} + 5\Delta x f'_{x_{\alpha}} - \frac{25}{2} x^2 f''_{x_{\alpha}} \right) \quad (5)$$

$$bf_{x_{\alpha}} = b \left( f_{x_B} + 2\Delta x f'_{x_{\alpha}} - 2x^2 f''_{x_{\alpha}} \right) \quad (6)$$

$$cf_{x_{\alpha}} = c \left( f_{x_C} - \Delta x f'_{x_{\alpha}} - \frac{1}{2} x^2 f''_{x_{\alpha}} \right) \quad (7)$$

上記式(5)~(7)で和を取る場合、 $f_{x_{\alpha}}$  を  $f_A, f_B, f_C$  の 3 変数で表すため、右辺括弧内第 2 項及び第 3 項は削除されるべきである。そのため式(5)~(7)を基に補間係数  $a, b, c$  に関する以下の 3 つの方程式を立てる。

$$a + b + c = 1 \quad (8)$$

$$5a + 2b - c = 0 \quad (9)$$

$$-\frac{25}{2}a - 2b - \frac{1}{2}c = 0 \quad (10)$$

上記式を解くことにより補間係数  $a, b, c$  を得る。本研究ではすべての解析領域において同一なアスペクト比の格子を配置するため全ての領域において使用する補間係数  $a, b, c$  は等しい。そのため式(2)~(10)の計算は初期設定時に 1 度行えばよく、メインとなる計算では並進前に補間処理を追加するのみである。このことから高アスペクト比になっても圧力の Poisson 方程式の収束性の影響

を受けない。

### 3. 扁平格子を用いたLBMの性能検証

本研究で開発した扁平格子を用いた格子ボルツマン法の性能検証として Härtel et al.<sup>1)</sup>によって行われた交換密度流の DNS 解析を参考にする。計算寸法は図-3に示すように高さ 0.1m、幅 0.8m の水槽へ淡水と塩水で半分ずつ満たす。本研究では壁面境界条件として no-slip 境界条件を適用し、2次元解析を行った。計算時間間隔 $\Delta t=0.001s$ 、鉛直空間解像度 $\Delta z=0.001m$ とし、水平空間解像度 $\Delta x$ を 0.001m (case1) の場合と 0.002m (case2) の 2 ケースで 30 秒の解析を行った。塩水の初期最大塩分濃度は淡水と塩水の密度差が約  $1kg/m^3$  となるように設定した。ここでは Härtel et al.<sup>1)</sup>によって行われた解析及び新谷<sup>2)</sup>によって開発された Fantom Refined (以下 Fantom とする) による解析と比較を行った。Fantom による解析の条件は case1 と同等とする。

図-4 に塩水の先端位置の時間変化の比較図を示す。図-4 より case1 と case2 は Fantom による解析及び Härtel et al.<sup>1)</sup>による解析結果と良好に一致していることが確認できる。解析時間  $t=25s$  でのスナップショットの比較を図-5に示す。図-5より本研究で開発したモデルの解析結果である case1 と Fantom による解析では同様な K-H 不安定渦の形成傾向が確認でき、case2 では case1 ほど細かな渦の形成には至っていないもののある程度渦が形成されていることが分かる。これは格子の扁平化により鉛直速度分布が平滑化されたためにスケールの小さな渦の形成が妨げられていることに起因すると思われる。最後に case1 と case2 での格子生成量と解析時間の比較を図-6に示す。図-6より計算格子量に関して、case2 は case1 の半部の格子量となっており、計算時間に関して case2 は case1 の半分以下の時間で解析されたことが確認できる。これは本解析では境界条件処理に収束計算を用いていること、マルチコアによる並列処理を行っていることが原因であると考えられる。

### 4. まとめ・今後の課題

本研究では補間処理の導入により扁平格子を利用した LBM による流体解析モデルを開発し、交換密度流の解析により性能検証を行った。扁平格子を適用した LBM による解析では塩水の先端位置の比較では正方格子を用いた解析および既往の研究結果と良好な一致を見せ、アスペクト比 2 の扁平格子の採用により計算格子量を半分に削減し、計算時間を大幅に削減することに成功した。

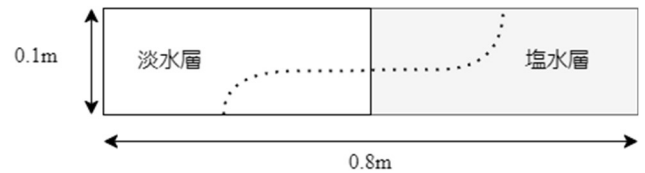


図 3 交換密度流解析の計算寸法

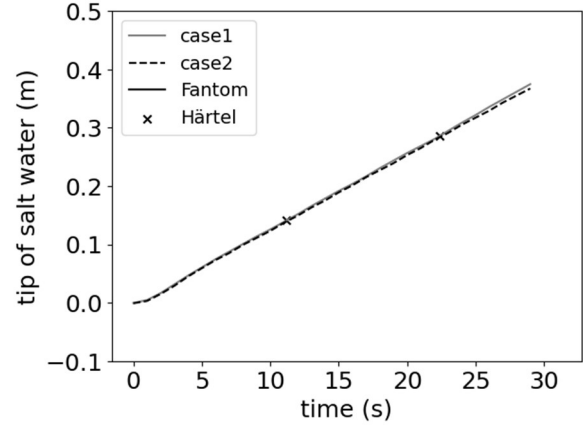


図 4 塩水の先端位置の時間変化

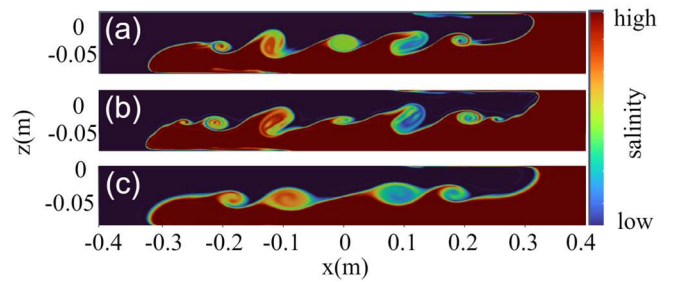


図 5  $t=25s$  でのスナップショット比較  
(a) : Fantom, (b) : case1, (c) : case2)

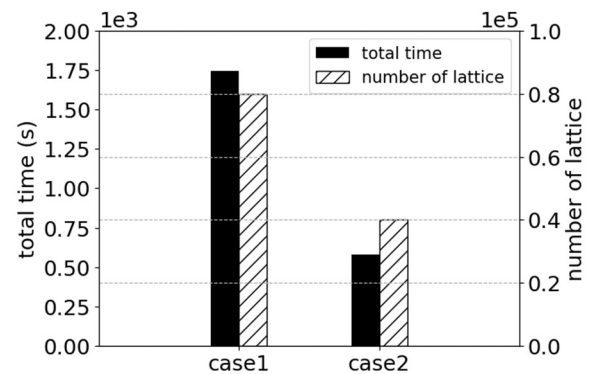


図 6 アスペクト比による計算効率の比較

### REFERENCES

- 1) 新谷：土木学会論文集 B1(水工学), Vol.73, P.I\_967-972, 2017
- 2) Härtel et al : J. Fluid Mechanics, Vol.418, p.189-212, 2000.