Wetting/Drying 問題における安定化手法に関する検討

東京都立大学大学院　岩崎翼，新谷哲也

1. 研究の目的

Discontinuous Galerkin (DG) 法を用いた浅水長波解析では，その計算コストと不連続面（水面の急激な変化）がもたらす陸域 (dry) 付近での数値不安定性に課題がある．その計算コストの課題に対して，著者ら [1] はこれまで移動する津波部分に対してのみ計算格子の局所的な高次精度化・高解像度化を実現する流体解析モデル (Systematic Grid) を開発することで．水域 (wet) の浅水長波解析に対する高速化を実現してきた．そこで本報告では，dry 領域を含む解析の高精度な安定化手法の提案と，上記のモデルにおけるその適用方法を提案する．

2. 離散化解析手法及び解析安定化手法の概要

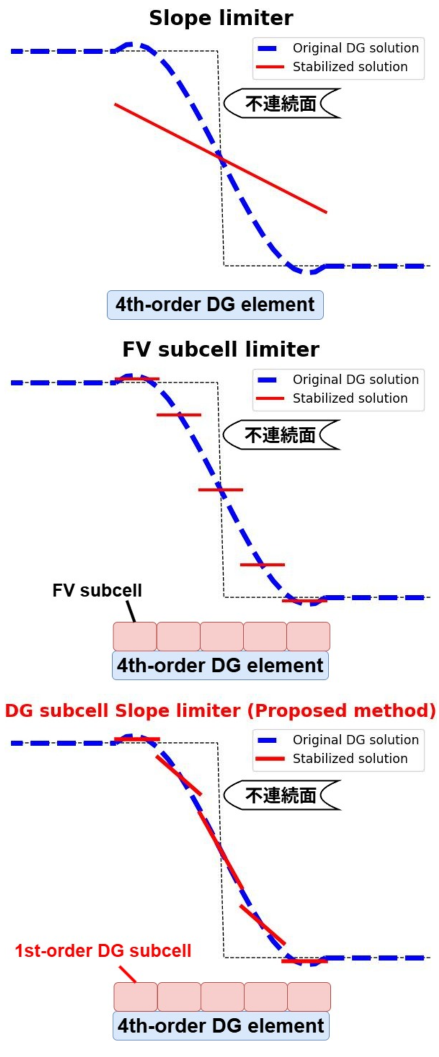

図-1: 各安定化手法の比較

2.1 離散化解析手法（Discontinuous Galerkin 法，DG 法）

まず，DG 法は，各計算セルが独立に高次精度解析を行い，計算セル境界で解の不連続性を許容することで，計算セル単位で解析の高精度化，及び不連続面の急勾配を高精度に再現する手法である．一方で，高次の DG 法では，不連続面の高次補間が引き起こす数値振動による数値不安定性が課題となっている．

2.2 既往の解析安定化手法１（Slope limiter[2]，図- 1 上図）

Slope Limiter は計算セルの解を線形 (1 次精度) に再構築することで，数値振動を抑制する手法である．一方で，再構築する解の勾配 ($\frac{\partial U}{\partial x}$) は計算セルの格子サイズに依存するため，不連続面の急勾配の精度が低下するという課題がある．

2.3 既往の解析安定化手法２（FV subcell limiter[3]，図- 1 中央図）

FV subcell limiter とは，対象 DG 計算セルを複数の subcell に細分化し，各 subcell で有限体積法（０次）による解析を行うことで，解析精度を大きく落とすことなく数値振動を抑制する手法である．その一方で，subcell 内部の解は０次（平均値近似）のため，DG 計算セルによる解の分布を破壊してしまう．

2.4 提案手法する解析安定化手法（図- 1 下図）

そこで本研究で提案する解析安定化手法では，各 subcell において有限体積法の代わりに，１次の DG 法を適用することで，元の DG 計算セルの解の分布の精度を維持する．そして各 subcell において，slope Limiter を適用することで，数値振動の抑制による解析安定化と不連続面の高精度再現を両立する．

3. 提案する流体解析モデル（Systematic Grid）の概要

近年の流体解析の高度化に対して，数値流体モデルの機能として動的かつ局所的な解像度変更，並列化及び計算格子の形状の任意性が望まれる．それに対して提案する流体解析モデル（Systematic Grid，図- 2 左図）では，計算格子をそれぞれが異なる役割を持つ並列化の最小単位 (”Domain”)，解像度変更の最小単位 (”Block”)，及び計算セル (”Element”) の階層構造として表現することで上記の機能を実現している．特に，”Element”（計算セル）は”Block”単位で任意形状かつ任意の解像度であり，各”Block”に対する高解像度化・高次精度化及び解析安定化手法の適用が可能である．

その一方で，一般的に”wet”及び”dry”状態は計算セル (”Element”) ごとに定義されるため，解析の高精度化のためには解析安定化手法を”Element”ごとに適用するべきである．そこで，”Block”内部の任意の解像度の”Element”それぞれに対して，より細かい解像度変更の最小単位 (”SubBlock”) を定義することで，”SubBlock”（元の”Element”）の wet/dry 状態に基づく解析安定化手法の適用を実現した（図- 2 右図）.

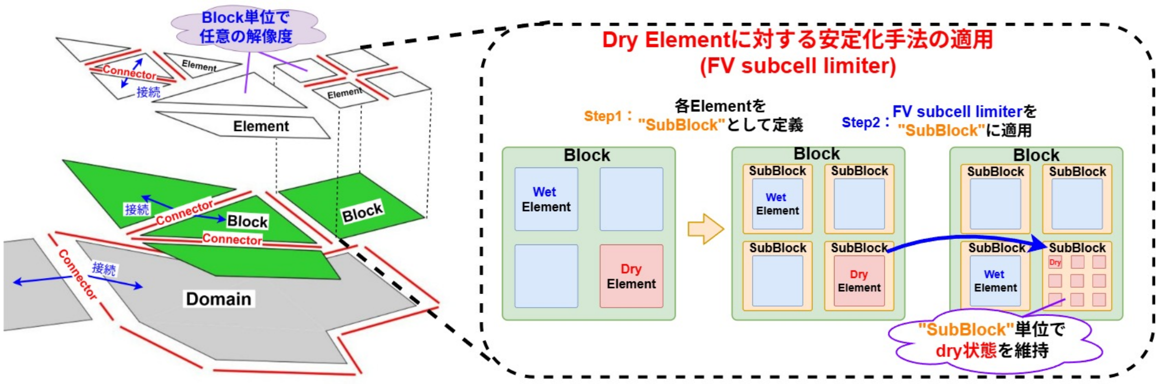

図- 2 提案する流体解析モデル（Systematic Grid）の概念図

4. 検証（Dam Break 問題）

本報告では，長さ 100m の水路の左側に水深 10m，右側に微小水深 10^{-5}m とした Dam Break 問題における各安定化手法の検証を行う．ここでは，４次の DG 法の 100 計算セルに対する各手法の解析精度を確認する．

図- 3 の解析解と各安定化手法の数値解の比較から，まず，wet area（水域）において，提案手法 (subDGSL) の精度が slope Limiter(SL) より高精度な解析を実現している．また，wet/dry front（水域と陸域の境界）においては，提案手法 (subDGSL) の精度が FV subcell limiter(subFV) より高精度な解析を実現している．

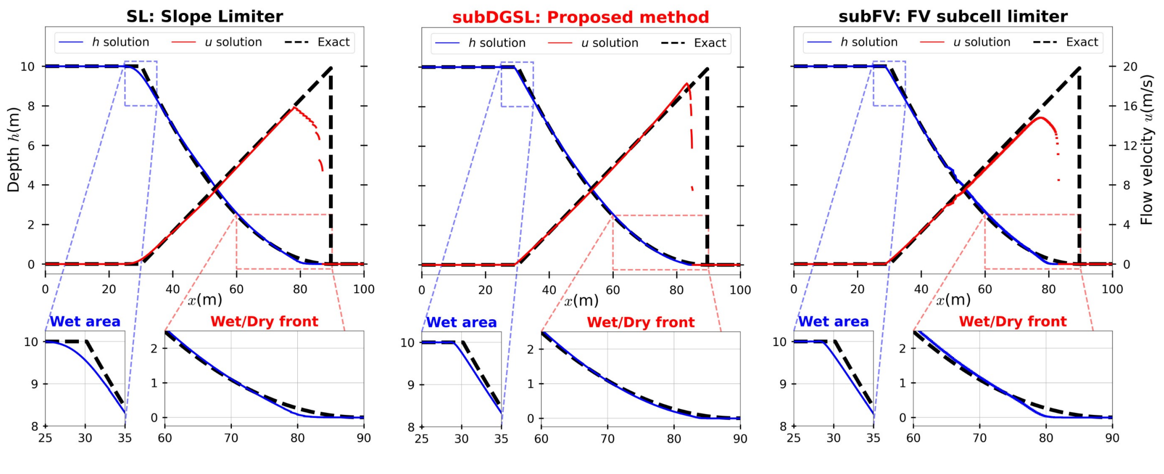

図- 3 Dam Break 問題における２秒後の解析解と数値解の比較

参考文献

[1] 岩崎翼，新谷哲也：浅水長波問題に対する構造・非構造混合 hp-adaptive DG 法の効率的な適用手法の提案と検証, 土木学会論文集, 81 巻, 16 号, pp. 24-16200, 2025.

[2] Xing, Y., Zhang, X. and Shu, C.-W.: Positivity-preserving high order well-balanced discontinuous Galerkin methods for the shallow water equations, *Advances in Water Resources*, Vol. 33, No. 12, pp. 1476-1493, 2010.

[3] Mossier, P., Beck, A. and Munz, CD.: A p-Adaptive Discontinuous Galerkin Method with hp-Shock Capturing, *Journal of Scientific Computing*, Vol. 91, No. 1, pp. 4-91, 2022.