

Hp-adaptive Discontinuous Galerkin 法の 浅水長波問題における性能検証

東京都立大学 岩崎翼, 新谷哲也

1. 研究の目的

津波災害対策で用いられる津波解析モデルの開発では、大規模解析による膨大な計算コスト、津波の非線形性により生じる衝撃波付近の精度低下及び数値不安定性が課題となっている。

そこで本報告では、計算の高速化を実現する hp-adaptive Discontinuous Galerkin (DG) 法^[1]、及び衝撃波付近の数値不安定性を抑制する Slope Limiter^[2]を導入した数値モデルを提案する。その後、検証として衝撃波を生じる跳水問題に対して hp-adaptive DG 法及び Slope Limiter を適用し、衝撃波問題における効果的な数値スキームの適用方法を検討する。

2. 数値解析手法

2.1 Discontinuous Galerkin (DG) 法

DG法は各計算セルが高次精度の数値解(滑らかな解)を持ち、さらに計算セル境界で解の不連続性を許容する離散化手法である(図-1)。これらの特徴により DG 法は計算セル単位での高精度化、及び衝撃波の急激な勾配の鋭敏な捕捉を実現している。

一方で高次の DG 法は衝撃波付近で非物理的な振動(数値振動)を生じ、衝撃波付近の解の精度低下や数値不安定性を引き起こしてしまう。

2.2 H-adaptive 法 (Adaptive Mesh Refinement 法)

H-adaptive 法は波の伝播先頭部分などの高い解像度が必要な領域に合わせて格子解像度を動的かつ局所的に変化させる手法である(図-2)。従って計算セルを必要な領域に集中できるため、計算コストを節約することが出来る。一方で高解像度の計算セルはより小さな Δt (時間刻み)を必要とし、計算コスト増加の原因となる。

2.3 P-adaptive 法

P-adaptive 法は動的かつ局所的に各計算セルの持つ DG 法の次数(数値解の滑らかさ)を変化させる手法である(図-3)。従って滑らかな形状の波の伝播を解析する場合には、低解像度な計算格子を用いても高精度な解析が可能となる。一方で高次の DG 法は小さな Δt (時間刻み)を必要とするため、計算コストが増加する傾向にある。

2.4 Slope Limiter

Slope Limiter は数値振動が発生している計算セルの数値解を線形(1次精度)に再構築する手法であり(図-4)、数値振動に伴う数値不安定性(負の水深など)を抑制することが出来る。一方で再構築する解の勾配は計算セルの格子解像度に依存するため、格子解像度が低い場合には衝撃波を精度よく捕捉することが出来ない。

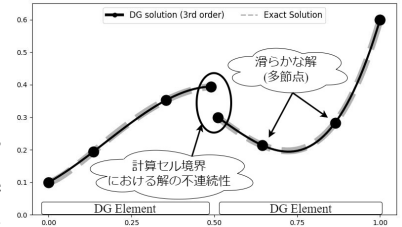


図-1: DG 法の特徴

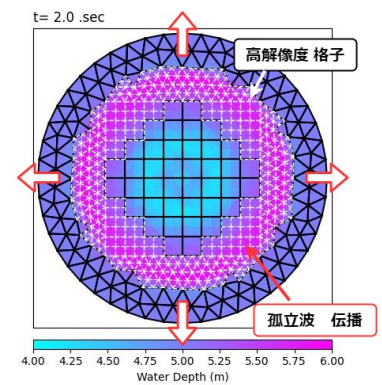


図-2: H-adaptive 法

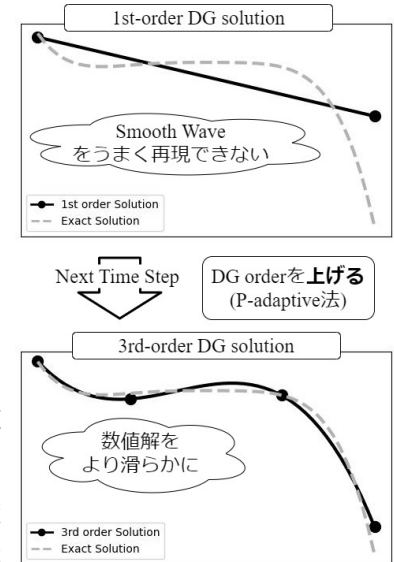


図-3: P-adaptive 法

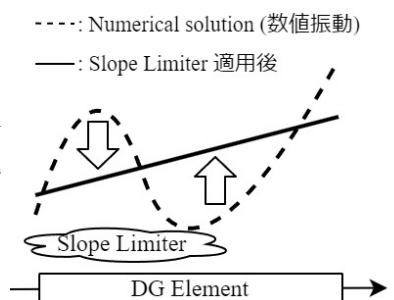


図-4: Slope Limiter

3. 検証

3.1 計算条件

本報告では衝撃波を生じる跳水問題に対して hp-adaptive DG 法及び Slope Limiter を適用した. 表-1 の各計算ケースに対して衝撃波の精度及び計算速度を比較し, 効果的な数値スキームの適用方法を検討する. なお本検証では数値振動が発生している各計算セルに対して, 計算格子の高解像度化 (h-adaptive 法), DG 法の次数の減少 (p-adaptive 法) 及び Slope Limiter の適用を行った.

表-1: 計算条件 (すべての計算ケースで初期 DG order は 4)

計算ケース	初期計算セル数	h-adaptive (h) 最大細分化レベル	p-adaptive (p) DG order	Slope Limiter (SL)
4th order	633	×	×	×
h	362	1	×	×
h + SL	362	1	×	○
hp	362	1	1, 2, 4	×
hp + SL	362	1	2, 4	○

3.2 結果及び考察

まず数値解と厳密解の比較(図-5)から, ケース hp+SL が最も数値振動が少なく衝撃波を精度よく捕捉出来ていることが確認出来た. また計算速度の比較(表-2)から, hp-adaptive 法を適用したケース (hp, hp+SL) が比較的高速であることが分かった. これは p-adaptive 法により衝撃波付近の DG 法の次数を下げたことで, Δt (時間刻み)が大きくなり, 計算コストを減らすことが出来たことによるものだと考えられる. 一方で表-2におけるケース hp 及び hp+SL の比較から, Slope Limiter 自体の計算コストが大きく, 今後 Slope Limiter のプログラムの効率化が必須と判断される.

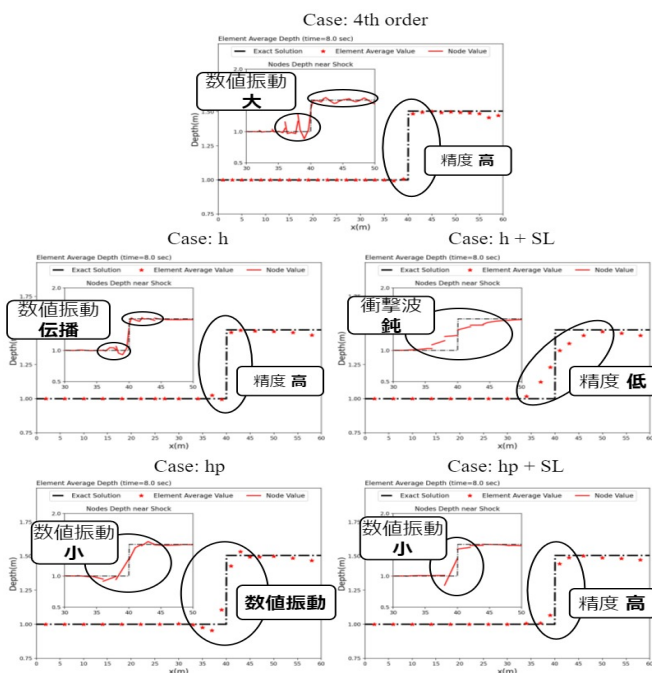


図-5: 各計算ケースの衝撃波の精度の比較

表-2: 各計算ケースの所要計算時間と平均 Δt

計算ケース	Wall Clock Time (sec)			平均 Δt
	DG法	hp + SL	Total	
2nd order(参考)	1941	0	1941	0.00283
4th order	5031	0	5031	0.00113
h	2147	1241	3388	0.00101
h + SL	1782	2314	4096	0.00107
hp	1229	633	1862	0.00168
hp + SL	1244	1455	2699	0.00173

参考文献

- [1] Claes Eskilsson and Spencer Sherwin. A triangular spectral/hp discontinuous galerkin method for modeling 2d shallow water equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 45, pp. 605 – 623, 06 2004.
- [2] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. The runge-kutta discontinuous galerkin method for conservation laws v: Multidimensional systems. *Journal of Computational Physics*, Vol. 141, No. 2, pp. 199–224, 1998.