Centroidal Voronoi Tessellation に基づく数値流動シミュレーターの設計

首都大学東京 都市基盤環境コース　新谷哲也

土木工学や地球物理学で対象とする扁平な水域における流動解析では，水平方向の空間格子を高精度かつ合理的に作成することが重要な課題となっている．特に格子の直交性と格子サイズの滑らかな変化 (quasi-uniform) を維持しつつ局所的に高解像度化が実現できる格子を手間をかけずに作成できることが望まれている．このような要求は矩形など単純形状の水域ではあまり問題とならないが，入り江等の複雑な地形を有する水域では構造・非構造に関わらず格子の調整に時間を要することが多い．

本研究で着目する Voronoi 図 (Voronoi diagram) は，古くから Thiessen 多角形，Dirichlet 分割とも呼ばれ，流体力学（主に気象分野），水文学，計画学，画像処理等の分野で広く利用されてきた（例えば，杉原 2009）．Voronoi 図は非構造格子モデルでよく用いられる Delaunay 三角形格子と相補的 (dual) な関係にあり、お互いの境界線 (edge) が直交する性質を有している (**図 1**)．この Voronoi 図作成手法の中に，近年 Ringler et al. (2013) によって海洋モデリング (MPAS-Ocean) で利用されている重心ボロノイ分割 (Centroidal Voronoi Tessellation:CVT) がある．CVT で作成された格子は上で述べた直交性と格子サイズが滑らかに変化する特徴を持ち，その作成手法も基本的には直感的でわかりやすいというメリットがある．しかしながら，著者の知る限り，湖沼・沿岸域（環境水理）の研究に用いられた例はほとんど見受けられない．そこで本論文では，この格子の特徴・作成手法の概略を説明するとともに，CVT に基づく数値流動シミュレーター（現在開発中）の一部を紹介する．

以下に，通常の CVT と局所高解像度化を実現する重み付き CVT による格子の作成手順を簡単に説明する．任意に配置された点 (Voronoi point, generator) を元に空間を Voronoi 分割する計算ライブラリーは様々提供されているが，本研究では Python の科学計算用ライブラリー Scipy の spatial.Voronoi ライブラリーを用いた（今回は平面２次元に限定）．まず，領域内に目的の格子数に対応する数のランダムな点を generator として Voronoi 図を作成する（**図 2**）．生成された各 Voronoi 領域（region）内の Voronoi 点は，一般的に Voronoi 領域の幾何重心とは一致していない．そこで次のステップでは，各 Voronoi 領域の幾何重心を求め，得られた幾何重心群を generator として再度 Voronoi 図を作成する．再作成された各 Voronoi 領域の形が再作成前と変化した場合，当然その幾何重心位置も変化してしまう．引き続き，この同様な操作（幾何重心群を求め generator とし，Voronoi 図を再作成する）を Voronoi 領域の幾何重心と generator がある一定の誤差範囲内で一致するまで繰り返すと CVT による格子が完成する．この一連の操作で作成された Voronoi 図は格子サイズがほぼ均等な一様格子となる (**図 3**)．次に，所定の位置近傍の解像度を増加させるために，重心を求める際に重み（質量分布，目的位置からの距離の関数等）を考慮して上述の操作を繰り返す．重みが大きいところに重心が集中するため，局所的な高解像度化が実現できる．**図 4** では円周部に重みを大きくして計算している．生成された格子はサイズの変化が滑らかで，Voronoi 点同士を結ぶ線と Voronoi 辺 (edge，速度の定義位置) が直交するだけではなく，Voronoi 辺がその中点に位置するなど計算上都合が良い特徴を持つ．数値的に重みを考慮した重心位置を求める際には，Voronoi 領域を多数の小さな三角形に分割して精度よく（重み関数の近似度を上げて）積分する必要がある．精度が不十分であると，上記の繰り返しが収束しない場合がある．また，今回の円形領域の CVT では，境界外側に鏡像となる点を配置して格子を作成している．

現在開発中のシミュレーターでは，Ringler et al. が用

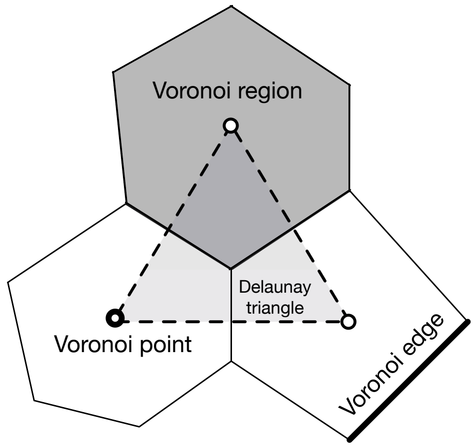

図 1: Voronoi 図

いた TRiSK スキームのように Vector invariant form の運動方程式を解くのではなく、静水圧近似された一般的な運動方程式をコロケート有限体積法で離散化して解を求めている．水平格子上の変数配置は Voronoi 点に水位，スカラー，Cell 平均速度を，Voronoi 辺に速度を定義する直交 C-Grid 格子とした（鉛直方向は z-coordinate)．本シミュレーターはスクリプト言語 Python のモジュールとして作成されており，C++(g++ with SWIG, OpenMPI, VTK, CMake and Boost) で記述されている．近い将来に大規模な計算（全球計算等）を想定しているため，ノード間は MPI(非同期送受信)，ノード内は OpenMP によるハイブリッド並列化を行なっている．Python での MPI の扱いには MPI4Py を利用している．また，分散メモリ型並列計算における非構造格子グリッドの格子分配には PyMetis を利用し (**図 5**)，計算の実行及び並列化効率の評価には，自作した Raspberry-Pi cluster (RasPi3B × 5 台) を用いた．

最後に，CVT で生成した格子に基づく数値流動シミュレーターで得られた結果の一例を示す．計算対象は，Csanady(1968) によって解析解が導かれている大規模円形湖の風応答とした．水面は風応力とコリオリ力の影響を受けながら特徴的な変動を示す．**図 6** には湖内のある一点における水位変動の解析解と数値解を示している．既往の研究（例えば，新谷 2017）と比べて格子数は 600 セルと非常に少ないが，計算された振幅と位相が解析解と良好に一致していることがわかる．本シミュレーターの詳細や実水域への適用は別の機会に紹介したい．

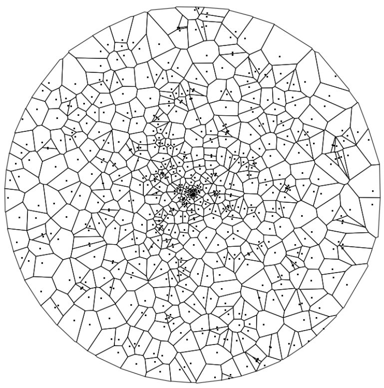

図 2: 乱数で生成した初期の Voronoi 図

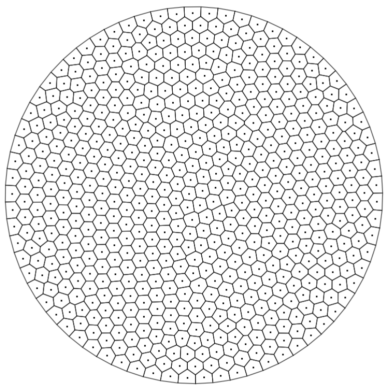

図 3: 重みなし CVT による Voronoi 図

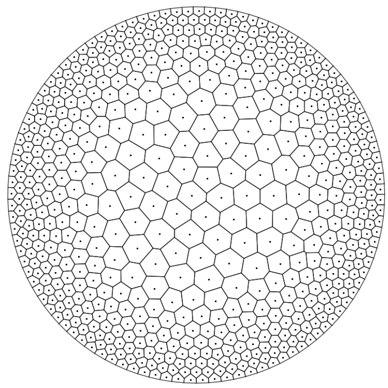

図 4: 重み付き CVT による Voronoi 図

図 5: PyMetis による格子配分

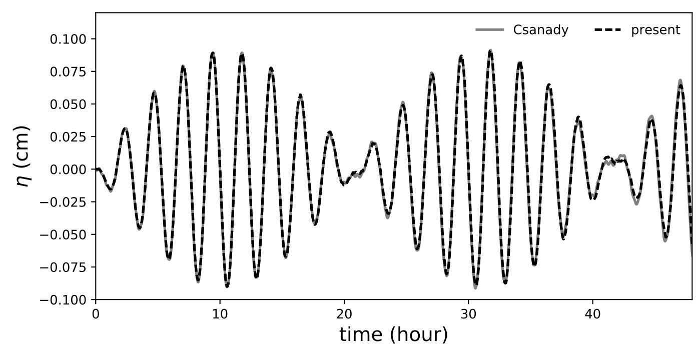

図 6: Csanady(1968) の解析解と数値解の比較（水面変動）

参考文献：杉原厚吉：なわばりの数理モデル，共立出版，2009. Ringler, T., Petersen, M., Jacobsen, D., Maltrud, M., Jones, P., A multi-resolution approach to global ocean modeling. Ocean Modelling, http://dx.doi.org/ 10.1016/j.ocemod.2013.04.010, 2013., Csanady, G. T.：Motions in a model Great Lake due to a suddenly imposed wind, J. Geophys. Res., Vol.73, pp.6435-6447, 1968. 新谷：柔軟な局所高解像度化を実現する非構造デカルト格子シミュレーターの構築，水工学論文集，2017.